Le *Habilitationsvortrag* de Riemann et les « axiomes » de la géométrie

Christophe Eckes

Université Lille 1

29 novembre 2011

Introduction

Riemann et la méthode axiomatique

Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : un point de départ « fuyant » pour justifier un processus d'axiomatisation de la géométrie

Riemann et la méthode axiomatique

Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : un point de départ « fuyant » pour justifier un processus d'axiomatisation de la géométrie

Pour des raisons différentes et en fonction de motivations distinctes, plusieurs acteurs associent le nom de RIEMANN à la promotion de la méthode axiomatique en géométrie.

Riemann et la méthode axiomatique

Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : un point de départ « fuyant » pour justifier un processus d'axiomatisation de la géométrie

Pour des raisons différentes et en fonction de motivations distinctes, plusieurs acteurs associent le nom de RIEMANN à la promotion de la méthode axiomatique en géométrie.

Dans sa *Leçon d'habilitation* (1854), RIEMANN accorderait, implicitement ou explicitement, une place centrale à une « pensée par axiomes » ou à la « méthode axiomatique » pour

- clarifier certains concepts mathématiques,
- exhiber avec « rigueur » les fondements de « la » géométrie.

Riemann et la méthode axiomatique

Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : un point de départ « fuyant » pour justifier un processus d'axiomatisation de la géométrie

Pour des raisons différentes et en fonction de motivations distinctes, plusieurs acteurs associent le nom de RIEMANN à la promotion de la méthode axiomatique en géométrie.

Dans sa *Leçon d'habilitation* (1854), RIEMANN accorderait, implicitement ou explicitement, une place centrale à une « pensée par axiomes » ou à la « méthode axiomatique » pour

- clarifier certains concepts mathématiques,
- exhiber avec « rigueur » les fondements de « la » géométrie.

Nécessité de décrire ces « interprétations », de dégager leur raison d'être et de souligner les DISTORSIONS qu'elles font subir aux arguments de RIEMANN.

La lecture du Habilitationsvortrag par Russell

Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897) :

La lecture du Habilitationsvortrag par Russell

RUSSELL, *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897) :

« Le dessein général de la dissertation de Riemann est de présenter les axiomes comme des étapes successives dans la classification de l'espèce nommée espace. Les axiomes de la Géométrie, semblables aux attributs d'une définition scolastique, apparaissent comme les déterminations successives de concepts de classe, aboutissant à l'espace euclidien. On a ainsi, au point de vue analytique, une formule presque aussi logique et aussi précise qu'on peut le désirer, et qui, par son caractère de classification, semble ne devoir contenir rien de superflu ou de surabondant ; et l'on obtient explicitement les axiomes sous la forme la plus désirable, c'est-à-dire comme des attributs du concept de l'espace ». [*Essai sur les fondements de la géométrie*, trad. A. Cadenat, relue et corrigée par B. Russell et L. Couturat]

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

L'ouvrage de RUSSELL est issu

- de sa *Dissertation* (1895),
- d'un article dans *Mind*,
- d'une série de conférences données à l'université John Hopkins et à Bryn Mawr College.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

L'ouvrage de RUSSELL est issu

- de sa *Dissertation* (1895),
- d'un article dans *Mind*,
- d'une série de conférences données à l'université John Hopkins et à Bryn Mawr College.

Mise en perspective historique de la « metagéométrie » (marquée par l'avènement des géométries non euclidiennes) largement inspirée par KLEIN : valorisation de la géométrie projective pour unifier le domaine de la géométrie et déduire les géométries métriques (cf. KLEIN, 1871, 1872)

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

L'ouvrage de Russell est issu

- de sa *Dissertation* (1895),
- d'un article dans *Mind*,
- d'une série de conférences données à l'université John Hopkins et à Bryn Mawr College.

Mise en perspective historique de la « metagéométrie » (marquée par l'avènement des géométries non euclidiennes) largement inspirée par Klein : valorisation de la géométrie projective pour unifier le domaine de la géométrie et déduire les géométries métriques (cf. Klein, 1871, 1872)

Est-ce également le cas de la lecture du *Habilitationsvortrag* effectuée par Russell ?

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Selon Russell, Riemann aurait proposé « une analyse logique de tous les axiomes essentiels de la géométrie » et « il aurait envisagé l'espace comme « cas particulier du concept plus général de multiplicité [variété = Mannigfaltigkeit] ».

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Selon Russell, Riemann aurait proposé « une analyse logique de tous les axiomes essentiels de la géométrie » et « il aurait envisagé l'espace comme « cas particulier du concept plus général de multiplicité [variété = Mannigfaltigkeit] ».

Deux assertions différentes :

- L'idée d'une « analyse logique » suppose une réflexion sur la structure logique d'une axiomatique donnée (par ex. indépendance de certains axiomes),
- la seconde assertion insiste davantage sur l'approche « conceptuelle » de Riemann, i.e. son affiliation à une *begriffliche Mathematik* (à l'instar de Dedekind).

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Selon Russell, Riemann aurait proposé « une analyse logique de tous les axiomes essentiels de la géométrie » et « il aurait envisagé l'espace comme « cas particulier du concept plus général de multiplicité [variété = Mannigfaltigkeit] ».

Deux assertions différentes :

- L'idée d'une « analyse logique » suppose une réflexion sur la structure logique d'une axiomatique donnée (par ex. indépendance de certains axiomes),
- la seconde assertion insiste davantage sur l'approche « conceptuelle » de Riemann, i.e. son affiliation à une *begriffliche Mathematik* (à l'instar de Dedekind).

Trouve-t-on réellement une « analyse logique » des axiomes essentiels à la géométrie chez Riemann ? Son approche conceptuelle est-elle sous-tendue par une réflexion sur les axiomes de la géométrie ?

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

En réalité, projection sur Riemann des propres thèses de Russell sur la géométrie et ses diverses ramifications. Pour Russell

- les *axiomes de la géométrie projective* sont purement *a priori*,
- la géométrie métrique (appliquée exclusivement aux variétés à courbure constante) admet deux classes d'axiomes :
  - (i) les *axiomes communs* aux géométries métriques euclidienne et non-euclidiennes : ils sont *a priori*,
  - (ii) les *axiomes qui distinguent* ces trois types de géométries : ils sont *empiriques*.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

En réalité, projection sur RIEMANN des propres thèses de RUSSELL sur la géométrie et ses diverses ramifications. Pour RUSSELL

- les *axiomes de la géométrie projective* sont purement *a priori*,
- la géométrie métrique (appliquée exclusivement aux variétés à courbure constante) admet deux classes d'axiomes :
  (i) les *axiomes communs* aux géométries métriques euclidienne et non-euclidiennes : ils sont *a priori*,
  (ii) les *axiomes qui distinguent* ces trois types de géométries : ils sont *empiriques*.

Deux difficultés :

(a) RIEMANN parle « d'hypothèses » — emploi moins fréquent du terme axiome en un sens à préciser,

(b) distinction entre « propriétés d'étendue » et « propriétés métriques » sur une variété et non pas entre les axiomes COMMUNS et les axiomes SPÉCIFIQUES aux géométries euclidienne et non euclidiennes.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell ne propose pas seulement une analyse philosophique et mathématique du *Habilitationsvortrag*, il s'appuie sur une périodisation historique inspirée de Klein :

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell ne propose pas seulement une analyse philosophique et mathématique du *Habilitationsvortrag*, il s'appuie sur une périodisation historique inspirée de Klein :

(i) *première période* : travaux de Gauss, Lobatchevsky et Bolyaï sur « l'indépendance » de l'axiome des parallèles et la construction d'une géométrie non-euclidienne (géométrie hyperbolique),

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell ne propose pas seulement une analyse philosophique et mathématique du *Habilitationsvortrag*, il s'appuie sur une périodisation historique inspirée de Klein :

(i) *première période* : travaux de Gauss, Lobatchevsky et Bolyaï sur « l'indépendance » de l'axiome des parallèles et la construction d'une géométrie non-euclidienne (géométrie hyperbolique),

(ii) *deuxième période* : le *Habilitationsvortrag* de Riemann associé au nom de Helmholtz,

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell ne propose pas seulement une analyse philosophique et mathématique du *Habilitationsvortrag*, il s'appuie sur une périodisation historique inspirée de Klein :

(i) *première période* : travaux de Gauss, Lobatchevsky et Bolyaï sur « l'indépendance » de l'axiome des parallèles et la construction d'une géométrie non-euclidienne (géométrie hyperbolique),

(ii) *deuxième période* : le *Habilitationsvortrag* de Riemann associé au nom de Helmholtz,

(iii) *troisième période* : travaux de Cayley et Klein visant à déduire les géométries euclidienne et non-euclidiennes à partir d'un point de vue projectif.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell ne propose pas seulement une analyse philosophique et mathématique du *Habilitationsvortrag*, il s'appuie sur une périodisation historique inspirée de Klein :

(i) *première période* : travaux de Gauss, Lobatchevsky et Bolyaï sur « l'indépendance » de l'axiome des parallèles et la construction d'une géométrie non-euclidienne (géométrie hyperbolique),

(ii) *deuxième période* : le *Habilitationsvortrag* de Riemann associé au nom de Helmholtz,

(iii) *troisième période* : travaux de Cayley et Klein visant à déduire les géométries euclidienne et non-euclidiennes à partir d'un point de vue projectif.

Valorisation des contributions de Klein. Lecture de Riemann à travers le prisme de Helmholtz. Suggestion discutable d'une succession dans le temps.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Plusieurs hypothèses de lecture par Russell :

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Plusieurs hypothèses de lecture par Russell :

(i) Riemann (et Helmholtz) auraient proposé un « traitement algébrique de l'espace »,
   - Riemann serait donc opposé au recours à l'intuition,

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Plusieurs hypothèses de lecture par Russell :

(i) Riemann (et Helmholtz) auraient proposé un « traitement algébrique de l'espace »,
   - Riemann serait donc opposé au recours à l'intuition,

(ii) Séparation entre la « partie mathématique » et la « partie philosophique » du *Habilitationsvortrag* car elles ne formeraient pas un tout cohérent,
   - *partie mathématique* : Riemann fournirait les matériaux pour une déduction *a priori* de certains axiomes,
   - *partie philosophique* : tous ces axiomes seraient *empiriques* (philosophie de style empiriste).

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Plusieurs hypothèses de lecture par Russell :

(i) Riemann (et Helmholtz) auraient proposé un « traitement algébrique de l'espace »,
  - Riemann serait donc opposé au recours à l'intuition,

(ii) Séparation entre la « partie mathématique » et la « partie philosophique » du *Habilitationsvortrag* car elles ne formeraient pas un tout cohérent,
  - *partie mathématique* : Riemann fournirait les matériaux pour une déduction *a priori* de certains axiomes,
  - *partie philosophique* : tous ces axiomes seraient *empiriques* (philosophie de style empiriste).

(iii) Riemann se serait restreint à de la géométrie métrique (point de vue purement *quantitatif* et non *qualitatif*).

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell : « il est dommage que Riemann, en conformité avec la tendance métrique de son temps, ait regardé l'espace comme étant primitivement une grandeur ou un assemblage de grandeurs où le problème principal consiste à assigner des quantités aux différents éléments ou points, sans avoir égard à la nature qualitative des quantités assignées ».

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell : « il est dommage que Riemann, en conformité avec la tendance métrique de son temps, ait regardé l'espace comme étant primitivement une grandeur ou un assemblage de grandeurs où le problème principal consiste à assigner des quantités aux différents éléments ou points, sans avoir égard à la nature qualitative des quantités assignées ».

Pour Russell

- la géométrie « qualitative » ou de « situation » correspond à la géométrie projective qui peut être conçue indépendamment de toute détermination métrique (cf. von Staudt ou encore Klein).
- Les contributions géométriques de Riemann n'ont rien de commun avec le développement d'une géométrie « qualitative ».

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Alors même qu'il « commente » le *Habilitationsvortrag*, RUSSELL en propose une lecture biaisée pour deux raisons :

- elle est conditionnée par les contributions ultérieures de HELMHOLTZ qui ne se situent pas au même niveau de généralité,
- RUSSELL rejette la plupart des « hypothèses » de RIEMANN parce qu'elles ne rentrent pas dans le cadre « projectif » qu'il privilégie.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Alors même qu'il « commente » le *Habilitationsvortrag*, RUSSELL en propose une lecture biaisée pour deux raisons :

- elle est conditionnée par les contributions ultérieures de HELMHOLTZ qui ne se situent pas au même niveau de généralité,
- RUSSELL rejette la plupart des « hypothèses » de RIEMANN parce qu'elles ne rentrent pas dans le cadre « projectif » qu'il privilégie.

Conclusions extrêmes de RUSSELL :

- caractère *a priori* de l'axiome de libre mobilité : « les grandeurs spatiales peuvent être déplacées sans déformation »,
- il est logiquement et philosophiquement impossible de concevoir une géométrie sur une variété non homogène (i.e. à mesure de courbure non constante),
  - la géométrie « riemannienne » DOIT s'appliquer exclusivement aux espaces à courbure constante.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

L'axiome de libre mobilité est « commun » aux trois géométries (euclidienne, hyperbolique, elliptique),

- il ne peut être ni prouvé ni réfuté par l'expérience,
- il est logiquement nécessaire,
- il est une « condition » sans laquelle nulle géométrie métrique ne pourrait être conçue.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

L'axiome de libre mobilité est « commun » aux trois géométries (euclidienne, hyperbolique, elliptique),

- il ne peut être ni prouvé ni réfuté par l'expérience,
- il est logiquement nécessaire,
- il est une « condition » sans laquelle nulle géométrie métrique ne pourrait être conçue.

Russell prétend démontrer

- l'impossibilité d'établir un système précis de coordonnées sans cet axiome,
- l'impossibilité philosophique d'un espace hétérogène (car l'espace est une « forme d'extériorité »)
- l'absurdité logique de déterminations métriques sans cet axiome : on ne pourrait comparer 2 figures spatiales selon le rapport de grandeur qu'en les *superposant*, et cela n'est possible qu'avec l'axiome de libre mobilité.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Cette lecture du *Habilitationsvortrag* est donc polarisée autour de l'axiome de libre mobilité (biais lié à la référence à HELMHOLTZ).

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Cette lecture du *Habilitationsvortrag* est donc polarisée autour de l'axiome de libre mobilité (biais lié à la référence à HELMHOLTZ).

Toutes les hypothèses de RIEMANN qui sont irréductibles au « point de vue projectif » et, par extension, au présupposé selon lequel l'espace doit être homogène, sont frappées d'inanité.

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Cette lecture du *Habilitationsvortrag* est donc polarisée autour de l'axiome de libre mobilité (biais lié à la référence à HELMHOLTZ).

Toutes les hypothèses de RIEMANN qui sont irréductibles au « point de vue projectif » et, par extension, au présupposé selon lequel l'espace doit être homogène, sont frappées d'inanité.

« RIEMANN dit que, dans l'infiniment petit, l'observation ne peut pas découvrir si la courbure s'écarte de la constante ; mais il n'essaie pas de montrer comment la géométrie pourrait rester possible en de telles circonstances (...). J'essaierai de montrer, dans le chapitre III, l'impossiblité de toute géométrie qui chercherait à se passer de [l'axiome de libre mobilité] ».

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

RUSSELL insiste sur l'existence d'une pensée par axiomes chez RIEMANN car

- il voit en HELMHOLTZ un digne continuateur de RIEMANN,
- HELMHOLTZ fonde la géométrie métrique euclidienne puis les géométries métriques non euclidiennes sur une série de quatre axiomes,
- HELMHOLTZ prétend que ces axiomes reposent sur des faits physiques (statut empirique),
- RUSSELL discute ce point en ayant à l'esprit les travaux de LIE et de ERDMANN (directement connectés à HELMHOLTZ)

La lecture du *Habilitationsvortrag* par Russell

Russell insiste sur l'existence d'une pensée par axiomes chez Riemann car

- il voit en Helmholtz un digne continuateur de Riemann,
- Helmholtz fonde la géométrie métrique euclidienne puis les géométries métriques non euclidiennes sur une série de quatre axiomes,
- Helmholtz prétend que ces axiomes reposent sur des faits physiques (statut empirique),
- Russell discute ce point en ayant à l'esprit les travaux de Lie et de Erdmann (directement connectés à Helmholtz)

Ces débats se focalisent sur une petite partie du *Habilitationsvortrag*, elle-même réinterprétée par Helmholtz.

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL, *Logique formelle et logique transcendantale* (1929) :

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL, *Logique formelle et logique transcendantale* (1929) :

« Le grand pas qu'a accompli la mathématique moderne, en particulier depuis RIEMANN, consiste en ce que non seulement elle s'est rendue claire cette possibilité d'un retour à la forme d'un système déductif (donc à la forme de toute science déductive) à partir de la géométrie et aussi de toutes les autres sciences existantes, mais encore en ce qu'elle est arrivée aussi à regarder de telles formes de systèmes comme des objets mathématiques ».

Les anachronismes de Husserl

Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale* (1929) :

« Le grand pas qu'a accompli la mathématique moderne, en particulier depuis Riemann, consiste en ce que non seulement elle s'est rendue claire cette possibilité d'un retour à la forme d'un système déductif (donc à la forme de toute science déductive) à partir de la géométrie et aussi de toutes les autres sciences existantes, mais encore en ce qu'elle est arrivée aussi à regarder de telles formes de systèmes comme des objets mathématiques ».

Aux yeux de Husserl la « mathématique moderne » se caractérise par un développement du « formalisme » qui fait abstraction de tout contenu pour s'interroger sur la « forme d'un système déductif ».

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL, *Logique formelle et logique transcendantale* (1929) :

« Le grand pas qu'a accompli la mathématique moderne, en particulier depuis RIEMANN, consiste en ce que non seulement elle s'est rendue claire cette possibilité d'un retour à la forme d'un système déductif (donc à la forme de toute science déductive) à partir de la géométrie et aussi de toutes les autres sciences existantes, mais encore en ce qu'elle est arrivée aussi à regarder de telles formes de systèmes comme des objets mathématiques ».

Aux yeux de HUSSERL la « mathématique moderne » se caractérise par un développement du « formalisme » qui fait abstraction de tout contenu pour s'interroger sur la « forme d'un système déductif ».

La mathématique est élevée au rang de paradigme des sciences déductives.

Les anachronismes de Husserl

La géométrie serait le premier domaine des mathématiques qui mettrait en œuvre une approche purement formelle.

Les anachronismes de Husserl

La géométrie serait le premier domaine des mathématiques qui mettrait en œuvre une approche purement formelle.

Husserl estime qu'ensuite le « formalisme » se serait généralisé aux autres sciences. Il décrit un double mouvement :

(i) de généralisation aux autres domaines des mathématiques mais aussi aux autres sciences (pas nécessairement « déductives » au sens strict, i.e. logico-mathématiques)

(ii) d'étagement puisqu'il s'agit

- à un premier niveau de formuler des systèmes formels (en faisant abstraction de tout contenu intuitif),
- à un second niveau de considérer ces systèmes formels comme des objets d'étude (en dégageant leur structure logique).

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL assigne à RIEMANN la parternité de ce processus. En privilégiant d'abord la géométrie, il fait clairement allusion au *Habilitationsvortrag*.

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL assigne à RIEMANN la parternité de ce processus. En privilégiant d'abord la géométrie, il fait clairement allusion au *Habilitationsvortrag*.

- HUSSERL connaît ce texte de longue date, puisqu'il en propose une analyse critique lors du semestre d'hiver 1889-1890 alors qu'il est Privatdozent à l'université de Halle.
- raison de cette allusion, peut-être le niveau remarquable de généralité et d'abstraction qui caractérise le concept de variété.

Les anachronismes de Husserl

HUSSERL assigne à RIEMANN la parternité de ce processus. En privilégiant d'abord la géométrie, il fait clairement allusion au *Habilitationsvortrag*.

- HUSSERL connaît ce texte de longue date, puisqu'il en propose une analyse critique lors du semestre d'hiver 1889-1890 alors qu'il est Privatdozent à l'université de Halle.
- raison de cette allusion, peut-être le niveau remarquable de généralité et d'abstraction qui caractérise le concept de variété.

En réalité, HUSSERL pratique un court-circuit entre RIEMANN et une partie de l'œuvre de HILBERT (promotion de la méthode axiomatique et, à partir des années 20, développement d'une théorie de la démonstration).

Les anachronismes de Husserl

En se référant à la géométrie, HUSSERL songe très explicitement aux *Grundlagen der Geometrie* (1899), œuvre dans laquelle HILBERT envisage la géométrie comme

- un SYSTÈME DÉDUCTIF,
- fondé sur cinq groupes d'axiomes (d'INCIDENCE, d'ORDRE, de CONGRUENCE, des PARALLÈLES et de CONTINUITÉ).

Les anachronismes de Husserl

En se référant à la géométrie, HUSSERL songe très explicitement aux *Grundlagen der Geometrie* (1899), œuvre dans laquelle HILBERT envisage la géométrie comme

- un SYSTÈME DÉDUCTIF,
- fondé sur cinq groupes d'axiomes (d'INCIDENCE, d'ORDRE, de CONGRUENCE, des PARALLÈLES et de CONTINUITÉ).

Ce système est pris pour « objet d'étude » : HILBERT en propose une analyse logique en abordant des questions de consistance, de complétude, d'indépendance ou encore de catégoricité (isomorphismes entre modèles réalisant un système d'axiomes). Construction de systèmes géométriques en ajoutant ou en retranchant certains axiomes.

Les anachronismes de Husserl

Objectif de HILBERT :

- généraliser la méthode axiomatique aux autres domaines des mathématiques (instrument d'unification des sciences mathématiques),
- l'étendre aux sciences de la nature. Grand projet d'axiomatisation de certaines théories physiques dont

Les anachronismes de Husserl

Objectif de HILBERT :

- généraliser la méthode axiomatique aux autres domaines des mathématiques (instrument d'unification des sciences mathématiques),
- l'étendre aux sciences de la nature. Grand projet d'axiomatisation de certaines théories physiques dont
  - la relativité générale (cf. les conférences de HILBERT, 1915, 1917)
  - la mécanique quantique (cf. article cosigné avec VON NEUMANN et NORDHEIM en 1928).

Les anachronismes de Husserl

Objectif de HILBERT :

- généraliser la méthode axiomatique aux autres domaines des mathématiques (instrument d'unification des sciences mathématiques),
- l'étendre aux sciences de la nature. Grand projet d'axiomatisation de certaines théories physiques dont
  - la relativité générale (cf. les conférences de HILBERT, 1915, 1917)
  - la mécanique quantique (cf. article cosigné avec VON NEUMANN et NORDHEIM en 1928).

HUSSERL projette donc sur RIEMANN une manière d'aborder les théories mathématiques comme s'il s'agissait de systèmes déductifs. En réalité,

- il associe le formalisme à HILBERT,
- il croit pouvoir tracer directement un trait d'union entre le *Habilitationsvortrag* et les *Grundlagen der Geometrie*

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

VUILLEMIN, *Philosophie de l'algèbre* (1962).

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

VUILLEMIN, *Philosophie de l'algèbre* (1962).

« Le grand mérite de RIEMANN, dans sa *Dissertation inaugurale* est d'avoir traité analytiquement du problème de l'espace, d'avoir, pour la première fois, présenté des réflexions « formelles » sur la Géométrie et d'avoir suivi une méthode axiomatique. De l'espace, en effet, on ne peut donner qu'une définition nominale ou *implicite*, dont le contenu exact ne peut apparaître qu'avec l'énumération d'axiomes. Tant que les liens de dépendance entre ceux-ci ne sont pas analysés, cette définition garde quelque chose d'obscur. Mais, pour qu'ils puissent l'être, il faut faire le départ entre les axiomes généraux concernant le concept d'une grandeur plusieurs fois étendue et les axiomes spécifiques ou métriques ».

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

« Il faut dire non seulement, avec Russell, que la période « riemannienne » en géométrie est analytique, tandis que la période « lobatschewskyenne » demeurait synthétique, mais que ce changement de forme correspond à une transformation générale de la méthode : de la description des modèles, on passe à l'analyse des structures et à l'axiomatique ; l'intuition fait place au concept. Le procédé riemannien sera donc entièrement logique et la définition de l'espace aura lieu, comme il est naturel dans l'analyse des concepts, *per genus proximum et differentiam specificam* ». « Les axiomes de la Géométrie, comme les marques d'une définition scolastique, apparaissent comme les déterminations successives de concepts génériques se terminant par l'espace euclidien ».

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Référence à Russell non fortuite : en 1968, Vuillemin publiera un ouvrage sur la première philosophie de Russell.

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Référence à RUSSELL non fortuite : en 1968, VUILLEMIN publiera un ouvrage sur la première philosophie de RUSSELL.

But de VUILLEMIN : radicaliser l'interprétation russellienne du *Habilitationsvotrag*. La *Leçon d'habilitation* de RIEMANN se caractériserait par

- une approche purement analytique (périodisation retenue par VUILLEMIN identique à celle de RUSSELL),
- l'usage systématique de la méthode axiomatique (en particulier avec des définitions implicites de concepts),
- une pensée par CONCEPTS (à l'exclusion de toute représentation intuitive),
- l'avènement d'une mathématique « structurale »,

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Référence à Russell non fortuite : en 1968, Vuillemin publiera un ouvrage sur la première philosophie de Russell.

But de Vuillemin : radicaliser l'interprétation russellienne du *Habilitationsvotrag*. La *Leçon d'habilitation* de Riemann se caractériserait par

- une approche purement analytique (périodisation retenue par Vuillemin identique à celle de Russell),
- l'usage systématique de la méthode axiomatique (en particulier avec des définitions implicites de concepts),
- une pensée par CONCEPTS (à l'exclusion de toute représentation intuitive),
- l'avènement d'une mathématique « structurale »,

Riemann est érigé en « père fondateur » des mathématiques structurales, au même titre que Galois.

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Vuillemin § 30 : « Pour comprendre ce qu'est une structure algébrique, partons d'une de ses expressions les plus simples, l'idée de groupe abstrait, telle que Galois l'a définie, ou plutôt telle que les Modernes l'ont axiomatisée ».

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

VUILLEMIN § 30 : « Pour comprendre ce qu'est une structure algébrique, partons d'une de ses expressions les plus simples, l'idée de groupe abstrait, telle que GALOIS l'a définie, ou plutôt telle que les Modernes l'ont axiomatisée ».

- le terme de groupe n'a pas une signification fixée une fois pour toutes chez Galois (opération qui consiste à « grouper » des substitutions / ensemble fermé par composition de ses éléments),
- il ne renvoie jamais à des entités « abstraites », i.e. GALOIS n'envisage pas une structure indépendamment de la nature des objets qu'elle contient.

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

VUILLEMIN § 30 : « Pour comprendre ce qu'est une structure algébrique, partons d'une de ses expressions les plus simples, l'idée de groupe abstrait, telle que GALOIS l'a définie, ou plutôt telle que les Modernes l'ont axiomatisée ».

- le terme de groupe n'a pas une signification fixée une fois pour toutes chez Galois (opération qui consiste à « grouper » des substitutions / ensemble fermé par composition de ses éléments),
- il ne renvoie jamais à des entités « abstraites », i.e. GALOIS n'envisage pas une structure indépendamment de la nature des objets qu'elle contient.

Même chose pour RIEMANN : une variété n'est pas une « structure abstraite », mais un concept général qui permet de formuler une série d'hypothèses sur la nature de l'espace physique, celles-ci étant plus ou moins certaines.

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Double identification dans l'argument de VUILLEMIN :

- méthode axiomatique / mathématiques structurales,
- GALOIS et RIEMANN comme pères fondateurs ou comme figures tutélaires d'un développement historique des sciences mathématiques orienté vers l'avènement des mathématiques structurales.
  - RIEMANN serait à l'« analyse », la « topologie » et la « géométrie différentielle », ce que GALOIS « est » à l'« algèbre »,

Riemann, anticipateur des mathématiques structurales ?

Double identification dans l'argument de Vuillemin :

- méthode axiomatique / mathématiques structurales,
- Galois et Riemann comme pères fondateurs ou comme figures tutélaires d'un développement historique des sciences mathématiques orienté vers l'avènement des mathématiques structurales.
  - Riemann serait à l'« analyse », la « topologie » et la « géométrie différentielle », ce que Galois « est » à l'« algèbre »,

Double problème : illusion rétrospective et lecture des écrits de ces deux protagonistes à partir d'une distribution des connaissances mathématiques qui commence seulement à se stabiliser au cours du premier tiers du XXe siècle.

Problèmes soulevés

(i) Est-il vrai que le *Hv* de Riemann met en jeu une « pensée par axiomes » ?

- Les « hypothèses » de Riemann sont-elles des « axiomes » ?
- Ne faut-il pas distinguer nettement le contexte d'élaboration du *Hv* — Göttingen dans les années 1850 — et sa réception par Helmholtz, Lie, Hilbert, Weyl, etc. ?

Problèmes soulevés

(i) Est-il vrai que le *Hv* de RIEMANN met en jeu une « pensée par axiomes » ?
  - Les « hypothèses » de RIEMANN sont-elles des « axiomes » ?
  - Ne faut-il pas distinguer nettement le contexte d'élaboration du *Hv* — Göttingen dans les années 1850 — et sa réception par HELMHOLTZ, LIE, HILBERT, WEYL, etc. ?

(ii) Si « begriffliche Mathematik » il y a chez RIEMANN, a-t-elle le même sens que la « begriffliche Mathematik » de HILBERT ?

Problèmes soulevés

(i) Est-il vrai que le *Hv* de Riemann met en jeu une « pensée par axiomes » ?
   - Les « hypothèses » de Riemann sont-elles des « axiomes » ?
   - Ne faut-il pas distinguer nettement le contexte d'élaboration du *Hv* — Göttingen dans les années 1850 — et sa réception par Helmholtz, Lie, Hilbert, Weyl, etc. ?

(ii) Si « begriffliche Mathematik » il y a chez Riemann, a-t-elle le même sens que la « begriffliche Mathematik » de Hilbert ?

(iii) A-t-on vraiment affaire à une pensée par concepts à l'exclusion de toute intuition chez Riemann ?
   - Songeons par exemple aux reproches de Weierstrass contre les « riemanniens » qui useraient et abuseraient d'intuitions géométriques en analyse.

Problèmes soulevés

(i) Est-il vrai que le *Hv* de RIEMANN met en jeu une « pensée par axiomes » ?

- Les « hypothèses » de RIEMANN sont-elles des « axiomes » ?
- Ne faut-il pas distinguer nettement le contexte d'élaboration du *Hv* — Göttingen dans les années 1850 — et sa réception par HELMHOLTZ, LIE, HILBERT, WEYL, etc. ?

(ii) Si « begriffliche Mathematik » il y a chez RIEMANN, a-t-elle le même sens que la « begriffliche Mathematik » de HILBERT ?

(iii) A-t-on vraiment affaire à une pensée par concepts à l'exclusion de toute intuition chez RIEMANN ?

- Songeons par exemple aux reproches de WEIERSTRASS contre les « riemanniens » qui useraient et abuseraient d'intuitions géométriques en analyse.

(iv) Ne doit-on pas insister davantage sur l'héritage de GAUSS et de DIRICHLET pour saisir la *Leçon d'habilitation* ?

Thèse avancée

Bien que RIEMANN privilégie la pensée au détriment du calcul dans son *Hv*, il ne raisonne pas par « axiomes ».

Thèse avancée

Bien que Riemann privilégie la pensée au détriment du calcul dans son *Hv*, il ne raisonne pas par « axiomes ».

Il introduit le concept général de variété pour deux raisons :

- il a en vue un projet général de *géométrisation de l'analyse* (dénominateur commun essentiel avec sa *Dissertation*)
- il entend relativiser l'évidence des « axiomes » de la géométrie élémentaire et ouvrir corrélativement le champ des hypothèses concevables au sujet de l'espace physique.

Thèse avancée

Bien que RIEMANN privilégie la pensée au détriment du calcul dans son *Hv*, il ne raisonne pas par « axiomes ».

Il introduit le concept général de variété pour deux raisons :

- il a en vue un projet général de *géométrisation de l'analyse* (dénominateur commun essentiel avec sa *Dissertation*)
- il entend relativiser l'évidence des « axiomes » de la géométrie élémentaire et ouvrir corrélativement le champ des hypothèses concevables au sujet de l'espace physique.

Aucun des trois protagonistes cités ne rappelle que la troisième partie du *Hv* est consacrée à l'espace physique et que la conclusion est adressée aux physiciens : RIEMANN invite ces derniers à prendre le relais pour corriger les « hypothèses » admises par NEWTON.

- Peut-être RIEMANN ne sépare-t-il pas la géométrie et la physique et sans doute n'est-il pas le seul à faire cela.

But visé

Il s'agira de distinguer le contexte d'élaboration du *Hv* et sa réception qui conduit à accorder une place importante à une pensée par axiomes voire même à la méthode axiomatique en géométrie.

But visé

Il s'agira de distinguer le contexte d'élaboration du *Hv* et sa réception qui conduit à accorder une place importante à une pensée par axiomes voire même à la méthode axiomatique en géométrie.

- Problème de Riemann-Helmholtz-Lie : caractérisation commune des géométries euclidienne et non-euclidiennes à partir des groupes de mouvements auxquels elles sont associées,
  - cf. Helmholtz, Erdmann, Lie, Russell, etc.

But visé

Il s'agira de distinguer le contexte d'élaboration du *Hv* et sa réception qui conduit à accorder une place importante à une pensée par axiomes voire même à la méthode axiomatique en géométrie.

- Problème de Riemann-Helmholtz-Lie : caractérisation commune des géométries euclidienne et non-euclidiennes à partir des groupes de mouvements auxquels elles sont associées,
  - cf. Helmholtz, Erdmann, Lie, Russell, etc.
- Problème de définition des variétés topologiques, différentielles, etc. : usage de la méthode axiomatique pour définir implicitement de tels concepts,
  - cf. en particulier Hilbert (1902), Weyl (1913), etc.

Partie I : contexte d'élaboration

Quelques rappels

Le choix du sujet et l'auditoire :

Pour son *Habilitationsvortrag*, Riemann propose trois sujets :

- le premier sur les séries trigonométriques,
- le deuxième sur les intersections de courbes planes du second degré,
- le troisième sur les « fondements » de la géométrie (ne pas confondre les « hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » et les *Grundlagen* der Geometrie).

Quelques rappels

Le choix du sujet et l'auditoire :

Pour son *Habilitationsvortrag*, Riemann propose trois sujets :

- le premier sur les séries trigonométriques,
- le deuxième sur les intersections de courbes planes du second degré,
- le troisième sur les « fondements » de la géométrie (ne pas confondre les « hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » et les *Grundlagen* der Geometrie).

Contrairement à l'usage, GAUSS choisit le troisième sujet.
Hypothèse de LAUGWITZ : GAUSS aurait procédé par élimination ; le premier sujet étant trop proche de la thèse de Riemann et le second trop évident, il opte pour le troisième.

Quelques rappels

Riemann prononce cette leçon en juin 1854 devant un jury composé en grande majorité de professeurs sans formation mathématique.

Quelques rappels

RIEMANN prononce cette leçon en juin 1854 devant un jury composé en grande majorité de professeurs sans formation mathématique.

En conséquence, les résultats et les hypothèses présentés par Riemann ne sont

- ni rigoureusement formalisés
- ni exprimés analytiquement en général.

Quelques rappels

RIEMANN prononce cette leçon en juin 1854 devant un jury composé en grande majorité de professeurs sans formation mathématique.

En conséquence, les résultats et les hypothèses présentés par Riemann ne sont

- ni rigoureusement formalisés
- ni exprimés analytiquement en général.

Au début de la première partie, RIEMANN rappelle que la difficulté de cet exercice réside plus dans les *concepts* (in den Begriffen) que dans la *construction*. Il distingue en filigrane deux modes de raisonnement :

- le premier, philosophique, s'effectue *par concepts* ;
- le second, mathématique, implique conjointement *représentation géométrique* et *formalisation analytique*.

Quelques rappels

Le point de vue « conceptuel » de Riemann est en partie *conditionné par un auditoire* de non mathématiciens (à l'exception de Gauss).

Quelques rappels

Le point de vue « conceptuel » de RIEMANN est en partie *conditionné par un auditoire* de non mathématiciens (à l'exception de GAUSS).

On est donc amené d'emblée à relativiser le fait que cet exposé marque un avènement massif des MATHÉMATIQUES CONCEPTUELLES ET ABSTRAITES.

Quelques rappels

Le point de vue « conceptuel » de RIEMANN est en partie *conditionné par un auditoire* de non mathématiciens (à l'exception de GAUSS).

On est donc amené d'emblée à relativiser le fait que cet exposé marque un avènement massif des MATHÉMATIQUES CONCEPTUELLES ET ABSTRAITES.

RIEMANN insiste sur l'importance des CONSTRUCTIONS en mathématiques (cf. pensée constructive dans le cas des SURFACES DE RIEMANN ou des SURFACES COURBES), ce qui nous éloigne d'une approche purement ANALYTIQUE en mathématiques.

- La suite du *Hv* montre d'ailleurs que RIEMANN reste attaché à des représentations intuitives et qu'il ne réduit pas les mathématiques à des classifications de concepts.

Quelques rappels

PHILOSOPHIE et MATHÉMATIQUES sont très intriquées dans le *Hv*. Il est impossible de les séparer voire carrément de les opposer (critique du commentaire de RUSSELL).

Quelques rappels

PHILOSOPHIE et MATHÉMATIQUES sont très intriquées dans le *Hv*. Il est impossible de les séparer voire carrément de les opposer (critique du commentaire de RUSSELL).

La publication du Habilitationsvortrag :

Pas du vivant de RIEMANN. La *leçon d'habilitation* est éditée à titre posthume en 1867 dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*

Quelques rappels

PHILOSOPHIE et MATHÉMATIQUES sont très intriquées dans le *Hv*. Il est impossible de les séparer voire carrément de les opposer (critique du commentaire de RUSSELL).

La publication du Habilitationsvortrag :

Pas du vivant de RIEMANN. La *leçon d'habilitation* est éditée à titre posthume en 1867 dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*

Elle fait l'objet d'une nouvelle publication dans les œuvres complètes de RIEMANN. Elles sont rassemblées par DEDEKIND et WEBER et elles paraissent

- en 1876 pour la première édition,
- en 1892 pour la seconde édition.

M. NOETHER et WIRTINGER ajoutent des suppléments en 1902.

Quelques rappels

Plan général de la leçon de Riemann

Première partie : introduction du concept de grandeur à n dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

Quelques rappels

Plan général de la leçon de RIEMANN

Première partie : introduction du concept de grandeur à n dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

Seconde partie : détermination des rapports métriques sur une variété *continue* (i.e. continue et différentiable).

(i) RIEMANN privilégie les variétés dites « riemanniennes », (caractérisées par une structure euclidienne en chacun de leurs espaces tangents).

(ii) Il généralise le concept de mesure de courbure aux variétés après un détour par le traité des surfaces courbes de GAUSS,

(iii) Il s'intéresse aux variétés *homogènes* (à courbure constante) (d'où l'on tire le problème de RIEMANN-HELMHOLTZ-LIE).

Quelques rappels

Plan général de la leçon de RIEMANN

Première partie : introduction du concept de grandeur à *n* dimensions. Distinction variétés *discrètes* / variétés *continues*. Engendrement des variétés.

Seconde partie : détermination des rapports métriques sur une variété *continue* (i.e. continue et différentiable).

(i) RIEMANN privilégie les variétés dites « riemanniennes », (caractérisées par une structure euclidienne en chacun de leurs espaces tangents).
(ii) Il généralise le concept de mesure de courbure aux variétés après un détour par le traité des surfaces courbes de GAUSS,
(iii) Il s'intéresse aux variétés *homogènes* (à courbure constante) (d'où l'on tire le problème de RIEMANN-HELMHOLTZ-LIE).

Troisième partie : application à l'espace, formulation d'hypothèses empiriquement testables sur l'espace physique.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

Par géométrie, RIEMANN entend la « science de l'espace ».

- Elle est fondée sur le concept d'espace (l'espace n'est pas une intuition ou une forme des phénomènes),
- elle a pour objet des constructions dans l'espace.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Par géométrie, Riemann entend la « science de l'espace ».

- Elle est fondée sur le concept d'espace (l'espace n'est pas une intuition ou une forme des phénomènes),
- elle a pour objet des constructions dans l'espace.

Riemann n'envisage pas le concept d'espace *indépendamment* de l'espace physique. Corrélativement, les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie sont en partie redevables de l'expérience.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

Par géométrie, RIEMANN entend la « science de l'espace ».

- Elle est fondée sur le concept d'espace (l'espace n'est pas une intuition ou une forme des phénomènes),
- elle a pour objet des constructions dans l'espace.

RIEMANN n'envisage pas le concept d'espace *indépendamment* de l'espace physique. Corrélativement, les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie sont en partie redevables de l'expérience.

RIEMANN ne caractérise pas un *domaine* de la géométrie (par ex. la géométrie différentielle) ni un *type* de géométrie (géométrie métrique). De plus, la géométrie ne relève pas pour lui des mathématiques pures.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

La définition riemannienne de la géométrie et le statut qu'il lui prête sont proches des arguments de Gauss, cf. lettre à Bessel du 9 avril 1830 :

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

La définition riemannienne de la géométrie et le statut qu'il lui prête sont proches des arguments de GAUSS, cf. lettre à BESSEL du 9 avril 1830 :

« Selon ma plus intime conviction la théorie de l'espace a une position par rapport à notre savoir *a priori* tout à fait différente de la théorie pure des grandeurs ; il manque tout à fait à notre connaissance de la première cette entière conviction de sa nécessité (donc aussi de son absolue vérité) qui est propre à la dernière ; nous devons avouer en toute humilité que si le nombre est une production de notre esprit seul, l'espace a aussi en dehors de notre esprit une réalité à laquelle on ne peut *a priori* entièrement dicter ses lois ».

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

La définition riemannienne de la géométrie et le statut qu'il lui prête sont proches des arguments de GAUSS, cf. lettre à BESSEL du 9 avril 1830 :

« Selon ma plus intime conviction la théorie de l'espace a une position par rapport à notre savoir *a priori* tout à fait différente de la théorie pure des grandeurs ; il manque tout à fait à notre connaissance de la première cette entière conviction de sa nécessité (donc aussi de son absolue vérité) qui est propre à la dernière ; nous devons avouer en toute humilité que si le nombre est une production de notre esprit seul, l'espace a aussi en dehors de notre esprit une réalité à laquelle on ne peut *a priori* entièrement dicter ses lois ».

GAUSS met la géométrie sur le même plan que la mécanique et il ne la sépare donc pas de la physique.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

La géométrie n'est pas pour RIEMANN une science analytique et *a priori* caractérisant des espaces abstraits. En réalité, il distingue

- la géométrie (science de l'espace),
- la théorie des grandeurs *n* fois étendues ou des variétés — l'espace physique étant un cas particulier de variétés.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

La géométrie n'est pas pour Riemann une science analytique et *a priori* caractérisant des espaces abstraits. En réalité, il distingue

- la géométrie (science de l'espace),
- la théorie des grandeurs n fois étendues ou des variétés — l'espace physique étant un cas particulier de variétés.

La théorie des variétés est purement *a priori*. Elle fait l'objet des parties I et II du *Habilitationsvortrag*. En revanche, la géométrie a un statut mixte. Elle est redevable

- de la théorie des variétés,
- de certaines observations empiriques. Son objet demeure l'espace physique.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

La théorie des variétés induit certaines distinctions conceptuelles :

- distinction entre une variété *discrète* et une variété *continue*,
- description de variétés libres de toute détermination métrique (i.e. variétés topologiques et différentiables un certain nombre de fois),
- mise au jour des conditions qui permettent de définir des déterminations métriques sur une variété.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

La théorie des variétés induit certaines distinctions conceptuelles :

- distinction entre une variété *discrète* et une variété *continue*,
- description de variétés libres de toute détermination métrique (i.e. variétés topologiques et différentiables un certain nombre de fois),
- mise au jour des conditions qui permettent de définir des déterminations métriques sur une variété.

Confusion de Russell : Riemann n'a pas pour seul objet la géométrie métrique, comme en atteste le concept général de « variété continue ».

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

La théorie des variétés induit certaines distinctions conceptuelles :

- distinction entre une variété *discrète* et une variété *continue*,
- description de variétés libres de toute détermination métrique (i.e. variétés topologiques et différentiables un certain nombre de fois),
- mise au jour des conditions qui permettent de définir des déterminations métriques sur une variété.

Confusion de RUSSELL : RIEMANN n'a pas pour seul objet la géométrie métrique, comme en atteste le concept général de « variété continue ».

Cette théorie a une fonction critique

- relativiser les axiomes de la géométrie,
- ouvrir le champ des hypothèses concevables sur l'espace physique,
- montrer que certaines d'entre elles, apparemment évidentes, ne sont pas empiriquement attestées.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

À première vue, le *Hv* marquerait une rupture radicale dans l'histoire de la géométrie. Un passage du *Hv* semble en attester.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

À première vue, le *Hv* marquerait une rupture radicale dans l'histoire de la géométrie. Un passage du *Hv* semble en attester.

« Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère ». [nécessité d'une clarification du concept d'espace et des constructions dans l'espace]

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

À première vue, le *Hv* marquerait une rupture radicale dans l'histoire de la géométrie. Un passage du *Hv* semble en attester.

« Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère ». [nécessité d'une clarification du concept d'espace et des constructions dans l'espace]

Interprétation obvie : RIEMANN veut se démarquer de tous ses prédécesseurs,

- pourtant il s'arrête à LEGENDRE,

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

À première vue, le *Hv* marquerait une rupture radicale dans l'histoire de la géométrie. Un passage du *Hv* semble en attester.

« Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère ». [nécessité d'une clarification du concept d'espace et des constructions dans l'espace]

Interprétation obvie : RIEMANN veut se démarquer de tous ses prédécesseurs,

- pourtant il s'arrête à LEGENDRE,
- il épargne tacitement GAUSS, or
  - GAUSS a réfuté la démonstration du postulat des parallèles proposée par LEGENDRE (lettre à GERLING du 11 mars 1816),
  - les emprunts de RIEMANN à GAUSS son nombreux et variés au cours du *Hv*.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Riemann se situe en rupture par rapport à Legendre, mais dans le prolongement de Gauss. En témoignent trois emprunts :

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Riemann se situe en rupture par rapport à Legendre, mais dans le prolongement de Gauss. En témoignent trois emprunts :

- au second mémoire sur les résidus biquadratiques écrit en latin sous le titre *Theoria Residuorum Biquadraticorum, commentatio secunda* (1831), (résumé en langue allemande dans les *Göttingiche gelehrte Anzeigen* datant du 23 avril 1831),
- au mémoire de Jubilé de Gauss (1849) intitulé *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*,
- aux *recherches générales sur les surfaces courbes* (1828).

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

RIEMANN se situe en rupture par rapport à LEGENDRE, mais dans le prolongement de GAUSS. En témoignent trois emprunts :

- au second mémoire sur les résidus biquadratiques écrit en latin sous le titre *Theoria Residuorum Biquadraticorum, commentatio secunda* (1831), (résumé en langue allemande dans les *Göttingiche gelehrte Anzeigen* datant du 23 avril 1831),
- au mémoire de Jubilé de GAUSS (1849) intitulé *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*,
- aux *recherches générales sur les surfaces courbes* (1828).

RIEMANN ne se limite pas à la théorie des surfaces courbes. Il évoque d'autres œuvres de GAUSS dans lesquelles intervient le concept de variété [Mannigfaltigkeit] et l'idée d'une théorie des grandeurs.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

Par exemple dans son *second mémoire sur les résidus biquadratiques*, GAUSS introduit les entiers « de Gauss », i.e. les nombres complexes $z = a + bi$ où a et b sont des entiers relatifs.

- L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss est donc $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. GAUSS le considère géométriquement comme un exemple de variété [Mannigfaltigkeit] bidimensionnelle discrète.

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

Par exemple dans son *second mémoire sur les résidus biquadratiques*, GAUSS introduit les entiers « de Gauss », i.e. les nombres complexes $z = a + bi$ où a et b sont des entiers relatifs.

- L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss est donc $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. GAUSS le considère géométriquement comme un exemple de variété [Mannigfaltigkeit] bidimensionnelle discrète.

Dans son *mémoire de Jubilé*, alors qu'il redémontre le TFA, GAUSS juge nécessaire la constitution d'une théorie générale et abstraite des grandeurs [eine allgemeine abstracte Grössenlehre] qui constituerait un domaine « indépendant de la spatialité » et « dont l'objet sont les combinaisons de grandeurs connexes conformément au principe de continuité, un domaine qui jusqu'à maintenant a été très peu travaillé et dans lequel on ne peut pas progresser sans disposer d'une langue empruntée aux images spatiales ».

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Riemann suit donc les prescriptions de Gauss en développant une théorie abstraite des grandeurs. En retour, on observe une généralisation « par dénivellation » en comparaison du traité de Gauss sur les surfaces courbes.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Riemann suit donc les prescriptions de Gauss en développant une théorie abstraite des grandeurs. En retour, on observe une généralisation « par dénivellation » en comparaison du traité de Gauss sur les surfaces courbes.

- les surfaces courbes sont initialement plongées dans $\mathbb{R}^3$,
- Gauss les munit d'un système de coordonnées curvilignes afin de décrire leur géométrie intrinsèque,
- cette géométrie intrinsèque repose analytiquement sur la première forme quadratique différentielle (i.e. le carré de l'élément linéaire) :

$$ds^2 = Edu_1^2 + 2Fdu_1 u_2 + Gdu_2^2.$$

- en particulier la mesure de courbure ou courbure de Gauss ne dépend que de E, F et G et de leurs dérivées jusqu'au second ordre [theorema egregium].

La géométrie au sens de RIEMANN et l'héritage de GAUSS

Différences par rapport à GAUSS :

- RIEMANN considère d'abord les variétés abstraction faite de toute détermination métrique,
- il les envisage en elles-mêmes (et non comme des sous-espaces plongés dans $\mathbb{R}^n$),
- il montre à quelle condition on peut les munir de déterminations métriques,
- il généralise ensuite la notion de mesure de courbure aux variétés « riemanniennes » — caractérisés par une structure euclidienne en chacun de leurs plans tangents.

La géométrie au sens de Riemann et l'héritage de Gauss

Différences par rapport à Gauss :

- Riemann considère d'abord les variétés abstraction faite de toute détermination métrique,
- il les envisage en elles-mêmes (et non comme des sous-espaces plongés dans $\mathbb{R}^n$),
- il montre à quelle condition on peut les munir de déterminations métriques,
- il généralise ensuite la notion de mesure de courbure aux variétés « riemanniennes » — caractérisés par une structure euclidienne en chacun de leurs plans tangents.

Comparativement, l'approche de Riemann est plus « abstraite », plus « générale » et elle est moins calculatoire que celle de Gauss. Cela ne tient pas seulement à la forme de l'exercice (qui privilégie la conception au détriment de l'analyse et du calcul) mais à la promotion d'une mathématique plus conceptuelle à Göttingen sous l'égide de Dirichlet et de Dedekind.

Les mathématiques « conceptuelles »

- Dans son *Hv*, RIEMANN cite JACOBI qui, selon DIRICHLET, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de DIRICHLET (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob JACOBI », 1852, in P. Lejeune DIRICHLET, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

Les mathématiques « conceptuelles »

- Dans son *Hv*, Riemann cite Jacobi qui, selon Dirichlet, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de Dirichlet (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi », 1852, in P. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

« Même si la tendance la plus prégnante de la nouvelle analyse consiste à substituer la pensée au calcul, il existe cependant certains domaines dans lesquels le calcul conserve toute sa place. Jacobi qui a soutenu de manière essentielle cette tendance a également apporté d'importantes contributions dans ces domaines, en raison de sa maîtrise des techniques [de calcul] ».

Les mathématiques « conceptuelles »

- Dans son *Hv*, Riemann cite Jacobi qui, selon Dirichlet, aurait privilégié la pensée au détriment du calcul en analyse.
- L'argument de Dirichlet (« Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi », 1852, in P. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Band 2, Berlin, 1897, p. 245) est plus nuancé.

« Même si la tendance la plus prégnante de la nouvelle analyse consiste à substituer la pensée au calcul, il existe cependant certains domaines dans lesquels le calcul conserve toute sa place. Jacobi qui a soutenu de manière essentielle cette tendance a également apporté d'importantes contributions dans ces domaines, en raison de sa maîtrise des techniques [de calcul] ».

Dedekind et Riemann prolongent sous des angles différents l'œuvre de Dirichlet et ils incarnent la promotion des mathématiques conceptuelles à Göttingen au cours des années 1850.

Les mathématiques « conceptuelles »

Nécessité d'un parallèle avec DEDEKIND :

- Dissertation en 1852 (sous la dir. de GAUSS)
- leçon d'habilitation en 1854 (sous la dir. de GAUSS)
- *Privatdozent* à Göttingen entre 1854 et 1858 (travaille alors essentiellement avec DIRICHLET).

Les mathématiques « conceptuelles »

Nécessité d'un parallèle avec DEDEKIND :

- Dissertation en 1852 (sous la dir. de GAUSS)
- leçon d'habilitation en 1854 (sous la dir. de GAUSS)
- *Privatdozent* à Göttingen entre 1854 et 1858 (travaille alors essentiellement avec DIRICHLET).

DEDEKIND donne alors des cours en théorie de Galois. Lecteur de GALOIS, SERRET et CAYLEY, il conçoit un groupe comme un ensemble d'éléments non spécifiés, ou plutôt comme un « tout » qu'il décompose en classes selon un sous-groupe.

Les mathématiques « conceptuelles »

Nécessité d'un parallèle avec DEDEKIND :

- Dissertation en 1852 (sous la dir. de GAUSS)
- leçon d'habilitation en 1854 (sous la dir. de GAUSS)
- *Privatdozent* à Göttingen entre 1854 et 1858 (travaille alors essentiellement avec DIRICHLET).

DEDEKIND donne alors des cours en théorie de Galois. Lecteur de GALOIS, SERRET et CAYLEY, il conçoit un groupe comme un ensemble d'éléments non spécifiés, ou plutôt comme un « tout » qu'il décompose en classes selon un sous-groupe.

- Cette mathématique « conceptuelle » ne repose pas encore sur une pensée par axiomes,
- par ex. axiomatisation d'un corps de nombres beaucoup plus tardive chez DEDEKIND (cf. supplément XI aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de DIRICHLET).

Les mathématiques « conceptuelles »

Approche également conceptuelle chez RIEMANN :

- l'espace physique est conçu comme une classe particulière de variétés métriques qui sont elles-mêmes une spécification du concept général de variété « continue »,
- dans sa *Dissertation* comme dans son *Hv*, RIEMANN emprunte à DIRICHLET sa « définition » très générale d'une fonction comme grandeur variable variant avec une autre grandeur variable.

Les mathématiques « conceptuelles »

Approche également conceptuelle chez RIEMANN :

- l'espace physique est conçu comme une classe particulière de variétés métriques qui sont elles-mêmes une spécification du concept général de variété « continue »,
- dans sa *Dissertation* comme dans son *Hv*, RIEMANN emprunte à DIRICHLET sa « définition » très générale d'une fonction comme grandeur variable variant avec une autre grandeur variable.

Pas plus que DEDEKIND, RIEMANN ne met en œuvre une pensée par axiomes pour expliciter ces concepts en 1850-1860.

Les mathématiques « conceptuelles »

Approche également conceptuelle chez Riemann :

- l'espace physique est conçu comme une classe particulière de variétés métriques qui sont elles-mêmes une spécification du concept général de variété « continue »,
- dans sa *Dissertation* comme dans son *Hv*, Riemann emprunte à Dirichlet sa « définition » très générale d'une fonction comme grandeur variable variant avec une autre grandeur variable.

Pas plus que Dedekind, Riemann ne met en œuvre une pensée par axiomes pour expliciter ces concepts en 1850-1860.

Au cours des années 1850, nous n'avons pas affaire à l'acte de naissance de « la » mathématique conceptuelle, mais à la promotion d'*une* mathématique conceptuelle localisée dans une institution (Göttingen) et sans lien avec la *méthode axiomatique*.

Les mathématiques « conceptuelles »

Dedekind et Riemann synthétisent dans des domaines distincts le double héritage de Gauss et de Dirichlet.

Les mathématiques « conceptuelles »

Dedekind et Riemann synthétisent dans des domaines distincts le double héritage de Gauss et de Dirichlet.

Ne pas oublier qu'en aval

- Dedekind participe à l'édition des œuvres complètes de Riemann,
- on doit à Dedekind un manuscrit non daté visant à préciser le contenu mathématique du *Hv* : les « Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen »,

Les mathématiques « conceptuelles »

DEDEKIND et RIEMANN synthétisent dans des domaines distincts le double héritage de GAUSS et de DIRICHLET.

Ne pas oublier qu'en aval

- DEDEKIND participe à l'édition des œuvres complètes de RIEMANN,
- on doit à DEDEKIND un manuscrit non daté visant à préciser le contenu mathématique du *Hv* : les « Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen »,
  - M.-A. SINACEUR situe cet écrit à la fin des années 1860,
  - DEDEKIND y propose certaines formules analytiques et une série de calculs explicites tout en mainenant la hiérarchie entre la « pensée » et le « calcul ».

Les mathématiques « conceptuelles »

En résumé, l'approche de RIEMANN est « conceptuelle » pour une double raison

- spécificité de l'exercice proposé et de l'auditoire,
- promotion d'*une* mathématique conceptuelle dans les années 1850.

Les mathématiques « conceptuelles »

En résumé, l'approche de RIEMANN est « conceptuelle » pour une double raison

- spécificité de l'exercice proposé et de l'auditoire,
- promotion d'*une* mathématique conceptuelle dans les années 1850.

Différent de la *begriffliche Mathematik* que HILBERT met en avant en 1919-1920 (cf. ses Vorlesungen à Göttingen sous le titre *Natur und mathematisches Erkennen*) :

- les théories mathématiques sont considérées par HILBERT comme des totalités organiques assujetties à la méthode axiomatique,
- HILBERT met en avant l'idée de mathématique conceptuelle pour répondre au soupçon de formalisme comme manipulation aveugle de symboles vides de sens.

Partie II : variétés et espace physique

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Riemann : « Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète ; chacun de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas un point, dans le second cas un élément de cette variété ».

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

RIEMANN : « Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète ; chacun de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas un point, dans le second cas un élément de cette variété ».

Rapprochement « tentant » avec CANTOR :

- correspondance CANTOR-DEDEKIND entre 1872 et 1889,
- utilisation du terme de « Mannigfaltigkeit »,
- référence explicite à la *Leçon d'habilitation* de RIEMANN.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

CANTOR, « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre » (litt. une contribution à la théorie des variétés), *Journal de Crelle*, 1878 : « lorsque l'on peut appliquer deux variétés l'une sur l'autre de manière univoque et complète, élément par élément — lorsqu'on peut le faire d'une manière, on peut également l'effectuer de beaucoup d'autres différentes — on s'accordera à dire dans ce qui suit qu'elles ont *même puissance* ou encore qu'elles sont *équivalentes* ».

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Cantor, « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre » (litt. une contribution à la théorie des variétés), *Journal de Crelle*, 1878 : « lorsque l'on peut appliquer deux variétés l'une sur l'autre de manière univoque et complète, élément par élément — lorsqu'on peut le faire d'une manière, on peut également l'effectuer de beaucoup d'autres différentes — on s'accordera à dire dans ce qui suit qu'elles ont *même puissance* ou encore qu'elles sont *équivalentes* ».

Cantor emploie ici « variété » [Mannigfaltigkeit] pour ensemble quelconque [Menge]. Son but est de classer des ensembles, le critère utilisé étant l'existence ou non d'une bijection entre ensembles.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Cantor, « Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre » (litt. une contribution à la théorie des variétés), *Journal de Crelle*, 1878 : « lorsque l'on peut appliquer deux variétés l'une sur l'autre de manière univoque et complète, élément par élément — lorsqu'on peut le faire d'une manière, on peut également l'effectuer de beaucoup d'autres différentes — on s'accordera à dire dans ce qui suit qu'elles ont *même puissance* ou encore qu'elles sont *équivalentes* ».

Cantor emploie ici « variété » [Mannigfaltigkeit] pour ensemble quelconque [Menge]. Son but est de classer des ensembles, le critère utilisé étant l'existence ou non d'une bijection entre ensembles.

Un ensemble, discret ou continu, est constitué d'éléments,

- dans une perspective ensembliste, on fait abstraction des « modes de liaison » entre éléments.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

CANTOR semble d'abord se situer dans la continuité de RIEMANN et HELMHOLTZ :

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Cantor semble d'abord se situer dans la continuité de Riemann et Helmholtz :

« Les recherches de Riemann, de Helmholtz (...) partent comme on sait, de la notion de *variété continue n* fois étendue et en font consister le *caractère essentiel* en ce que leurs éléments dépendent de n variables réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre, en sorte qu'à chaque élément de la *variété* appartient un système de valeurs x_1, x_2, ..., x_n admissible, et réciproquement à chaque système de valeurs x_1, x_2, ..., x_n admissible appartient un certain élément de la *variété*.
Le plus souvent, (...) on suppose en outre *tacitement* que la correspondance des éléments de la *variété* et du système de valeurs x_1, x_2, ..., x_n posé comme base, est *continue*, en sorte qu'à chaque changement infiniment petit du système de valeurs x_1, x_2, ..., x_n répond un changement infiniment petit de l'élément de la variété, et réciproquement (...) ».

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Mais il ajoute :

« Nous avons seulement à montrer ici, que si on laisse cette supposition de côté (...), si par rapport à la correspondance entre la *variété* et ses *coordonnées* on n'admet aucune limitation, ce caractère considéré par les auteurs comme *essentiel* (d'après lequel une *variété* n-uple *continue* est telle qu'on peut en déterminer les éléments par n coordonnées réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre), devient *absolument sans valeur*.
Comme notre travail le montrera, on peut même déterminer les éléments d'une *variété continue* n-fois étendue de manière complète et univoque à l'aide d'une *seule* coordonnée réelle et continue ».

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Derrière un même vocable fondé sur le concept de « variété », on observe que l'approche de RIEMANN n'est pas ensembliste car

- il ne raisonne pas en termes de rapport d'élément à ensemble (le mot élément est réservé aux variétés discrètes chez RIEMANN)
- il s'intéresse aux modes de liaison qui permettent de passer d'un objet [élément / point] à un autre dans une variété.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Derrière un même vocable fondé sur le concept de « variété », on observe que l'approche de RIEMANN n'est pas ensembliste car

- il ne raisonne pas en termes de rapport d'élément à ensemble (le mot élément est réservé aux variétés discrètes chez RIEMANN)
- il s'intéresse aux modes de liaison qui permettent de passer d'un objet [élément / point] à un autre dans une variété.

Au contraire, CANTOR neutralise tout mode de liaison (continu) entre éléments dans une variété continue. Il cherche à établir une bijection, i.e. une application bi-univoque « élément par élément » entre variétés.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Derrière un même vocable fondé sur le concept de « variété », on observe que l'approche de RIEMANN n'est pas ensembliste car

- il ne raisonne pas en termes de rapport d'élément à ensemble (le mot élément est réservé aux variétés discrètes chez RIEMANN)
- il s'intéresse aux modes de liaison qui permettent de passer d'un objet [élément / point] à un autre dans une variété.

Au contraire, CANTOR neutralise tout mode de liaison (continu) entre éléments dans une variété continue. Il cherche à établir une bijection, i.e. une application bi-univoque « élément par élément » entre variétés.

Le résultat fondamental de CANTOR dans son *Beitrag* consiste à montrer l'existence d'une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ qui ont donc même puissance [Mächtigkeit] (résultat déjà formulé dans une lettre à DEDEKIND du 20 juin 1877).

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Il est donc erroné de penser que Riemann préfigurerait une démarche ensembliste en mathématiques. Inversement, il n'est pas vrai de dire que Cantor travaillerait dans le prolongement de Riemann et Helmholtz.

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Il est donc erroné de penser que Riemann préfigurerait une démarche ensembliste en mathématiques. Inversement, il n'est pas vrai de dire que Cantor travaillerait dans le prolongement de Riemann et Helmholtz.

Les réflexions de Riemann sur les « variétés » et les contributions de Cantor en théorie des ensembles ne convergent guère avant Hilbert (cf. ses deux annexes de 1902 aux *Grundlagen der Geometrie* dans lesquelles figure une définition implicite des variétés topologiques bidimensionnelles réelles).

Une approche « conceptuelle » mais non ensembliste

Il est donc erroné de penser que Riemann préfigurerait une démarche ensembliste en mathématiques. Inversement, il n'est pas vrai de dire que Cantor travaillerait dans le prolongement de Riemann et Helmholtz.

Les réflexions de Riemann sur les « variétés » et les contributions de Cantor en théorie des ensembles ne convergent guère avant Hilbert (cf. ses deux annexes de 1902 aux *Grundlagen der Geometrie* dans lesquelles figure une définition implicite des variétés topologiques bidimensionnelles réelles).

Dans ces annexes, Hilbert revendique une *approche ensembliste* — qu'il associe à Cantor — pour clarifier le concept riemannien de *variété*.

variétés continues et variétés métriques

Riemann commence par faire abstraction

- de tout sur-espace ambiant dans lequel une variété serait plongée,
- de toute détermination métrique sur une variété,

variétés continues et variétés métriques

RIEMANN commence par faire abstraction

- de tout sur-espace ambiant dans lequel une variété serait plongée,
- de toute détermination métrique sur une variété,

Il envisage une variété (continue) comme un espace amorphe de dimension finie n. Il ne le considère pas globalement, mais localement. Mathématiquement, il s'agit d'une variété « topologique » de dimension n, i.e. localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ à ceci près que RIEMANN n'effectue aucune distinction entre

- structure topologique,
- structure de variété différentielle.

En revanche il distingue nettement VARIÉTÉ CONTINUE (libre de toute détermination métrique) et VARIÉTÉ MÉTRIQUE.

variétés continues et variétés métriques

Riemann fait allusion à la géométrie des situations qui étudie des variétés continues indépendamment de toute considération d'ordre métrique. Il évoque en effet

« une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété ».

variétés continues et variétés métriques

RIEMANN fait allusion à la géométrie des situations qui étudie des variétés continues indépendamment de toute considération d'ordre métrique. Il évoque en effet

« une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété ».

Le terme « région » montre l'importance que RIEMANN accorde à un point de vue local. Son but est de préciser comment *localiser* un point dans une variété.

- Contrairement à RUSSELL (1897), RIEMANN n'estime pas qu'une variété doit être *homogène* pour que des coordonnées soient bien définies sur elle,
- ce passage montre que le point de vue de RIEMANN n'est pas exclusivement métrique.

variétés continues et variétés métriques

Le *Hv* ne doit pas être vu simplement et exclusivement comme l'acte de naissance de la *géométrie riemannienne* (étude des variétés riemanniennes qui sont « euclidiennes dans l'infinitésimal »).

- RIEMANN conçoit d'abord des variétés dépourvues de déterminations métriques (Partie I),
- il envisage plusieurs déterminations métriques possibles ; il se restreint finalement aux variétés « riemanniennes » — sans expliciter cette restriction.

variétés continues et variétés métriques

Le *Hv* ne doit pas être vu simplement et exclusivement comme l'acte de naissance de la *géométrie riemannienne* (étude des variétés riemanniennes qui sont « euclidiennes dans l'infinitésimal »).

- Riemann conçoit d'abord des variétés dépourvues de déterminations métriques (Partie I),
- il envisage plusieurs déterminations métriques possibles ; il se restreint finalement aux variétés « riemanniennes » — sans expliciter cette restriction.

Le raisonnement de Riemann

- ne consiste pas en une *généralisation* de la géométrie *euclidienne* à la géométrie *riemannienne*,
- mais en une série de *spécifications* à partir du concept *général* de variété continue.

variétés continues et variétés métriques

Dans la deuxième partie, RIEMANN étudie les « rapports métriques dont une variété est susceptible et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques ».

variétés continues et variétés métriques

Dans la deuxième partie, RIEMANN étudie les « rapports métriques dont une variété est susceptible et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques ».

« Ces rapports métriques ne peuvent être étudiés que dans des concepts de grandeur abstraits, et leur dépendance ne peut se représenter que par des formules. Dans certaines hypothèses cependant, ils sont décomposables en rapports qui, pris séparément, sont susceptibles d'une représentation géométrique ».

variétés continues et variétés métriques

Dans la deuxième partie, Riemann étudie les « rapports métriques dont une variété est susceptible et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques ».

« Ces rapports métriques ne peuvent être étudiés que dans des concepts de grandeur abstraits, et leur dépendance ne peut se représenter que par des formules. Dans certaines hypothèses cependant, ils sont décomposables en rapports qui, pris séparément, sont susceptibles d'une représentation géométrique ».

Riemann ne se restreint pas à des objets mathématiques connus — par ex. les surfaces courbes — ; sa démarche est *abstraite* et *conceptuelle*. Mais, lorsque cela est envisageable, Riemann n'hésite pas à utiliser des « représentations géométriques ». (Tension entre une *begriffliche Mathematik* et une *anschauliche Mathematik* dans le *Hv* comme dans la *Dissertation*).

variétés continues et variétés métriques

Les « déterminations métriques » sur une variétés sont assujetties à deux restrictions.

Première restriction (cf. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*) : « les éléments linéaires infiniment petits se laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction ».

variétés continues et variétés métriques

Les « déterminations métriques » sur une variétés sont assujetties à deux restrictions.

Première restriction (cf. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*) : « les éléments linéaires infiniment petits se laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction ».

Riemann suppose que l'on peut toujours comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété.

- En effet, soient M une variété riemannienne, p un point de M et $v_p \in T_pM$ un vecteur tangent. La *longueur* de v_p n'est pas modifiée par déplacement parallèle — intuitivement, sans glissement ni retournement — le long d'un lacet issu de p. En revanche, son *orientation* l'est.

variétés continues et variétés métriques

Les « déterminations métriques » sur une variétés sont assujetties à deux restrictions.

PREMIÈRE RESTRICTION (cf. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*) : « les éléments linéaires infiniment petits se laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction ».

RIEMANN suppose que l'on peut toujours comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété.

- En effet, soient M une variété riemannienne, p un point de M et $v_p \in T_pM$ un vecteur tangent. La *longueur* de v_p n'est pas modifiée par déplacement parallèle — intuitivement, sans glissement ni retournement — le long d'un lacet issu de p. En revanche, son *orientation* l'est.

RIEMANN : « l'hypothèse qui s'offre d'abord, et que je développerai ici, est celle dans laquelle la longueur des lignes est indépendante de leur position ».

variétés continues et variétés métriques

Deuxième restriction (cf. Weyl) : « le carré de [la] longueur [des éléments linéaires], c'est-à-dire de la distance de deux points infiniment voisins est donnée par une forme quadratique de différentielles de la forme (...) [$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k$] après qu'on y a caractérisé chaque point par des coordonnées x quelconques ».

variétés continues et variétés métriques

Deuxième restriction (cf. Weyl) : « le carré de [la] longueur [des éléments linéaires], c'est-à-dire de la distance de deux points infiniment voisins est donnée par une forme quadratique de différentielles de la forme (...) [$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k$] après qu'on y a caractérisé chaque point par des coordonnées x quelconques ».

Mais Riemann ne se restreint pas immédiatement à ce cas :

variétés continues et variétés métriques

Deuxième restriction (cf. Weyl) : « le carré de [la] longueur [des éléments linéaires], c'est-à-dire de la distance de deux points infiniment voisins est donnée par une forme quadratique de différentielles de la forme (...) $[\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k]$ après qu'on y a caractérisé chaque point par des coordonnées x quelconques ».

Mais Riemann ne se restreint pas immédiatement à ce cas :

« l'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités $\mathrm{d}x$, qui restera invariable lorsqu'on changera les signes de toutes les quantités $\mathrm{d}x$, et dans laquelle les constantes arbitraires seront des fonctions continues des quantités x ». L'élément linéaire $\mathrm{d}s = f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n)$ au point P satisfait alors à la condition :

$$f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \varrho\mathrm{d}x_1, \varrho\mathrm{d}x_2, ..., \varrho\mathrm{d}x_n) = |\varrho| f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n),$$

variétés continues et variétés métriques

Commentaire de WEYL : « Si, avec Riemann, on suppose l'élément linéaire mesurable, alors la variété admet une détermination métrique en un point P lorsque, à chaque élément linéaire (de composantes $\mathrm{d}x_i$) correspond une mesure numérique

$$\mathrm{d}s = f_P(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n).$$

La fonction f_P est une fonction homogène du premier ordre au sens où, si l'on multiplie les arguments $\mathrm{d}x_i$ par un facteur de proportionnalité réel commun ϱ, alors la fonction f_P est multipliée par $|\varrho|$. On doit naturellement supposer que les divers points de la variété ne se différencient pas du point de vue de la détermination métrique attachée à chacun d'eux ; cela se formule analytiquement comme suit : les fonctions f_P corrrespondant à des points différents P sont toutes issues d'une fonction f par des transformations linéaires des variables ».

variétés continues et variétés métriques

« C'est bien le cas lorsque f_P^2 est une forme quadratique définie positive en tout point de la variété :

$$f = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2}.$$

En revanche ce n'est plus le cas en général, lorsque f_P est la racine quatrième d'une forme du quatrième degré avec des coefficients variables d'un point à un autre ».

variétés continues et variétés métriques

« C'est bien le cas lorsque f_P^2 est une forme quadratique définie positive en tout point de la variété :

$$f = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2}.$$

En revanche ce n'est plus le cas en général, lorsque f_P est la racine quatrième d'une forme du quatrième degré avec des coefficients variables d'un point à un autre ».

Riemann : « L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable et elle ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement ».

variétés continues et variétés métriques

« C'est bien le cas lorsque f_P^2 est une forme quadratique définie positive en tout point de la variété :

$$f = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2}.$$

En revanche ce n'est plus le cas en général, lorsque f_P est la racine quatrième d'une forme du quatrième degré avec des coefficients variables d'un point à un autre ».

Riemann : « L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable et elle ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement ».

- Première restriction levée par Weyl en 1918 pour construire sa « géométrie purement infinitésimale »,
- Seconde restriction discutée par Weyl (pb de l'espace, 1919).

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Classification des variétés :

- **variétés continues** (topologiques et différentiables),
- **variétés métriques** — dont les variétés riemanniennes,
- **variétés riemanniennes à courbure constante** (positive, négative ou nulle),
- **variétés euclidiennes** ou plates (courbure constante nulle).

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Classification des variétés :

- **variétés continues** (topologiques et différentiables),
- **variétés métriques** — dont les variétés riemanniennes,
- **variétés riemanniennes à courbure constante** (positive, négative ou nulle),
- **variétés euclidiennes** ou plates (courbure constante nulle).

Riemann commence donc par la classe la plus générale de variétés pour aboutir à celle qui correpond à la géométrie euclidienne.

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Interprétation de RUSSELL : il faut séparer nettement l'analyse conceptuelle de RIEMANN et sa philosophie de style « empiriste ».

- Cela voudrait donc dire que la classification des variétés pourrait être clairement séparée des hypothèses formulées par RIEMANN en troisième partie,

En réalité, RIEMANN formule les « hypothèses » visant à caractériser l'espace physique à partir de sa classification conceptuelle, de plus, l'épistémologie implicite de RIEMANN n'est pas de style empiriste (différent de HELMHOLTZ).

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Interprétation de Russell : il faut séparer nettement l'analyse conceptuelle de Riemann et sa philosophie de style « empiriste ».

- Cela voudrait donc dire que la classification des variétés pourrait être clairement séparée des hypothèses formulées par Riemann en troisième partie,

En réalité, Riemann formule les « hypothèses » visant à caractériser l'espace physique à partir de sa classification conceptuelle, de plus, l'épistémologie implicite de Riemann n'est pas de style empiriste (différent de Helmholtz).

Granger (*La pensée de l'espace*) : « la construction d'une théorie de la mesure comme fondant une géométrie possible oblige à dépasser le domaine de l'expérience, en particulier par des hypothèses dans le domaine de l'infiniment petit. Le géomètre fondateur devra donc raisonner a priori, mais aussi évaluer la probabilité empirique de telles hypothèses ».

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Granger montre (1) que Riemann ne s'en tient pas au domaine de l'empirie et (2) qu'il n'y a nulle contradiction à évaluer ensuite le degré de « certitude empirique » des hypothèses sur l'espace physique.

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Granger montre (1) que Riemann ne s'en tient pas au domaine de l'empirie et (2) qu'il n'y a nulle contradiction à évaluer ensuite le degré de « certitude empirique » des hypothèses sur l'espace physique.

Le degré de certitude empirique est adossé à la classification des variétés.

- les « propriétés d'étendue » de l'espace physique le caractérisent en tant que variété « amorphe »,
- les « propriétés métriques » de l'espace physique le caractérisent en tant que variété « riemannienne »
  - sa mesure de courbure est-elle constante, et si oui, peut-elle être positive ?
  - sa mesure de courbure peut-elle être variable, et dans ce cas, ne doit-on pas mettre en question les notions de corps rigide et de rayon lumineux en ligne droite ?

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord $=$ propriété d'étendue).

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord = propriété d'étendue).

Deux hypothèses de RIEMANN :

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord = propriété d'étendue).

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure positive, il serait *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut alors pas être arbitrairement grande) tout en étant *illimité*,

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord $=$ propriété d'étendue).

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure positive, il serait *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut alors pas être arbitrairement grande) tout en étant *illimité*,

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure variable,

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord = propriété d'étendue).

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure positive, il serait *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut alors pas être arbitrairement grande) tout en étant *illimité*,

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure variable,

  - il ne serait alors pas *homogène*,

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Les hypothèses touchant aux propriétés d'étendue de l'espace sont plus certaines que les hypothèses qui caractérisent ses propriétés métriques.

- par ex., il ne fait pas de doute que l'espace est *illimité* [Unbegrenztheit] (variété sans bord = propriété d'étendue).

Deux hypothèses de RIEMANN :

(a) dans l'immensurablement grand, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure positive, il serait *fini* (la distance entre deux points quelconques ne peut alors pas être arbitrairement grande) tout en étant *illimité*,

(b) dans l'immensurablement petit, l'espace pourrait avoir une mesure de courbure variable,
  - il ne serait alors pas *homogène*,
  - ses déterminations métriques dépendraient de « forces agissantes » de nature indéterminée.

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Il n'y a pas l'axiome de libre mobilité parmi les hypothèses de RIEMANN. D'ailleurs, l'hypothèse (b) remettrait en question le caractère *a priori* d'un tel axiome. Celui-ci suppose que l'espace doit être homogène. Pour RIEMANN

- aucun argument mathématique ou logique ne conduit nécessairement à une telle supposition,
- aucune donnée expérimentale ne permet de trancher de manière définitive en faveur de cette supposition.

Les hypothèses de Riemann sur l'espace physique

Il n'y a pas l'axiome de libre mobilité parmi les hypothèses de RIEMANN. D'ailleurs, l'hypothèse (b) remettrait en question le caractère *a priori* d'un tel axiome. Celui-ci suppose que l'espace doit être homogène. Pour RIEMANN

- aucun argument mathématique ou logique ne conduit nécessairement à une telle supposition,
- aucune donnée expérimentale ne permet de trancher de manière définitive en faveur de cette supposition.

RUSSELL (1897). La ligne de partage entre axiomes *a priori* et axiomes *empiriques* est la suivante : les axiomes communs aux trois géométries métriques (par ex. axiome de libre mobilité) sont *a priori*, les axiomes spécifiques à chacune de ces géométries sont empiriques.

WEYL (1918). Seules les hypothèses qui caractérisent l'espace comme *continuum amorphe* sont *a priori*.

Partie III : prolongements

Liens avec une pensée par axiomes

Nous avons montré

- que Riemann met en œuvre une approche conceptuelle en mathématiques,
- mais qu'il ne fonde pas la géométrie sur un système d'axiomes,
- et qu'il ne définit pas ses concepts par une liste d'axiomes.

Liens avec une pensée par axiomes

Nous avons montré

- que Riemann met en œuvre une approche conceptuelle en mathématiques,
- mais qu'il ne fonde pas la géométrie sur un système d'axiomes,
- et qu'il ne définit pas ses concepts par une liste d'axiomes.

Une partie de la réception du *Hv* se caractérise par l'usage d'« axiomes » pour clarifier certains concepts (par ex. celui de variété) et pour expliciter les fondements théoriques d'une partie de la *Leçon* de Riemann. Deux références sélectionnées :

- Helmholtz, « Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen » (1868)
- Hilbert, deux annexes aux *Grundlagen der Geometrie* publiées en 1902.

Liens avec une pensée par axiomes

Problème « commun » : le pb de RIEMANN-HELMHOLTZ-LIE.
Mais par « axiomes », HELMHOLTZ et HILBERT n'entendent pas la même chose, ils ne leur accordent ni le même statut, ni les mêmes fonctions.

- HELMHOLTZ : les « axiomes » de la géométrie sont des faits fondamentaux (empiriques) qui commandent la résolution de ce problème,
- HILBERT : la résolution de ce problème exige une clarification préalable du concept de variété (définition implicite ou par axiomes d'une variété).

Liens avec une pensée par axiomes

Problème « commun » : le pb de Riemann-Helmholtz-Lie.
Mais par « axiomes », Helmholtz et Hilbert n'entendent pas la même chose, ils ne leur accordent ni le même statut, ni les mêmes fonctions.

- Helmholtz : les « axiomes » de la géométrie sont des faits fondamentaux (empiriques) qui commandent la résolution de ce problème,
- Hilbert : la résolution de ce problème exige une clarification préalable du concept de variété (définition implicite ou par axiomes d'une variété).

Le problème de Riemann-Helmholtz est discuté par Lie, Erdmann, Russell, Poincaré, Hilbert etc.

- Problème localisé qui porte sur les variétés « riemanniennes » à courbure constante et qui, sous la plume de Lie, fait jouer un rôle central aux *groupes de transformations*.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Dans son article de 1868, Helmholtz reprend partiellement le titre de la *Leçon d'habilitation* de Riemann en remplaçant de manière notable le terme « Hypothesen » par « Tatsachen ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Dans son article de 1868, Helmholtz reprend partiellement le titre de la *Leçon d'habilitation* de Riemann en remplaçant de manière notable le terme « Hypothesen » par « Tatsachen ».

(i) Cette substitution indique que Helmholtz défend une thèse radicalement empiriste pour élucider les fondements de la géométrie (ce qui n'est pas le cas de Gauss ou encore de Riemann),

(ii) il n'entend pas dégager des hypothèses dont il évaluerait le degré de certitude empirique, mais un ensemble de faits fondamentaux d'où découle la géométrie (initialement la géométrie euclidienne avant que Helmholtz n'étende son raisonnement aux géométries non euclidiennes).

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Dans son article de 1868, Helmholtz reprend partiellement le titre de la *Leçon d'habilitation* de Riemann en remplaçant de manière notable le terme « Hypothesen » par « Tatsachen ».

(i) Cette substitution indique que Helmholtz défend une thèse radicalement empiriste pour élucider les fondements de la géométrie (ce qui n'est pas le cas de Gauss ou encore de Riemann),

(ii) il n'entend pas dégager des hypothèses dont il évaluerait le degré de certitude empirique, mais un ensemble de faits fondamentaux d'où découle la géométrie (initialement la géométrie euclidienne avant que Helmholtz n'étende son raisonnement aux géométries non euclidiennes).

(iii) Pour Helmholtz, l'espace doit être homogène — pour Riemann au contraire, il ne s'agit pas là d'un fait mais d'une hypothèse dont la certitude empirique n'est pas établie dans l'immensurablement petit.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Helmholtz : « Parmi les propositions de la géométrie, lesquelles ont une signification vraiment objective, lesquelles ne sont que des définitions, ou les conséquences de définitions, lesquelles ne dépendent que du mode de représentation ? »

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Helmholtz : « Parmi les propositions de la géométrie, lesquelles ont une signification vraiment objective, lesquelles ne sont que des définitions, ou les conséquences de définitions, lesquelles ne dépendent que du mode de représentation ? »

Différence fondamentale chez Helmholtz entre

(i) une *définition* qui est de nature purement conventionnelle

(ii) et un *axiome* dont la fonction est d'exhiber les faits fondamentaux dont dépendent nos connaissances géométriques.

- un axiome (en géométrie) n'est donc pas une simple convention et il ne peut pas être assimilé à une définition déguisée.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

HELMHOLTZ : « Parmi les propositions de la géométrie, lesquelles ont une signification vraiment objective, lesquelles ne sont que des définitions, ou les conséquences de définitions, lesquelles ne dépendent que du mode de représentation ? »

Différence fondamentale chez HELMHOLTZ entre

(i) une *définition* qui est de nature purement conventionnelle

(ii) et un *axiome* dont la fonction est d'exhiber les faits fondamentaux dont dépendent nos connaissances géométriques.

- un axiome (en géométrie) n'est donc pas une simple convention et il ne peut pas être assimilé à une définition déguisée.

A fortiori, un axiome n'est pas une proposition formulée indépendamment de la nature des objets auxquels elle renvoie ($\neq$ HILBERT). HELMHOLTZ met en valeur le contenu physique de ses axiomes ; de plus, il n'analyse pas la structure logique de l'axiomatique à laquelle il aboutit.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

I. « L'espace à n dimensions est une variété n fois étendue ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

I. « L'espace à n dimensions est une variété n fois étendue ».

II. « On présuppose l'existence de corps mobiles mais rigides en eux-mêmes ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

I. « L'espace à *n* dimensions est une variété *n* fois étendue ».

II. « On présuppose l'existence de corps mobiles mais rigides en eux-mêmes ».

III. « On présuppose une mobilité parfaitement libre des corps rigides, c'est-à-dire, on suppose que chaque point en eux peut être déplacé continûment vers le lieu de chaque autre point, tant que son mouvement n'est pas restreint par les équations qui existent entre lui et les autres points restants du système rigide auquel il appartient ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

I. « L'espace à n dimensions est une variété n fois étendue ».

II. « On présuppose l'existence de corps mobiles mais rigides en eux-mêmes ».

III. « On présuppose une mobilité parfaitement libre des corps rigides, c'est-à-dire, on suppose que chaque point en eux peut être déplacé continûment vers le lieu de chaque autre point, tant que son mouvement n'est pas restreint par les équations qui existent entre lui et les autres points restants du système rigide auquel il appartient ».

IV. « Deux corps congruents sont encore à nouveau congruents après que l'un d'eux a subi une révolution complète autour d'un axe de rotation arbitraire ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Axiome 1 : l'espace est envisagé comme une variété (sans que Helmholtz revienne sur les réflexions de Riemann pour introduire des déterminations métriques sur une variété),

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

Axiome 1 : l'espace est envisagé comme une variété (sans que HELMHOLTZ revienne sur les réflexions de RIEMANN pour introduire des déterminations métriques sur une variété),

Axiome 2 : existence de corps rigides. [$\neq$ RIEMANN : « il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide [des festen Körpers] et du rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit ».]

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Axiome 1 : l'espace est envisagé comme une variété (sans que Helmholtz revienne sur les réflexions de Riemann pour introduire des déterminations métriques sur une variété),

Axiome 2 : existence de corps rigides. [$\neq$ Riemann : « il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide [des festen Körpers] et du rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit ».]

Axiome 3 : axiome de libre mobilité qui suppose de se restreindre à des variétés métriques homogènes (axiome *a priori* selon Russell).

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Axiome 1 : l'espace est envisagé comme une variété (sans que Helmholtz revienne sur les réflexions de Riemann pour introduire des déterminations métriques sur une variété),

Axiome 2 : existence de corps rigides. [$\neq$ Riemann : « il semble que les concepts empiriques, sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'étendue, le concept du corps solide [des festen Körpers] et du rayon lumineux, cessent de subsister dans l'infiniment petit ».]

Axiome 3 : axiome de libre mobilité qui suppose de se restreindre à des variétés métriques homogènes (axiome *a priori* selon Russell).

Axiome 4 : axiome dit de monodromie, dont la validité est jugée discutable par Lie.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Passage du *Hv* qui intéresse Helmholtz : « Les variétés dont la mesure de courbure est partout $= 0$ peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés, dont la mesure de courbure est partout constante. Le caractère commun de ces variétés, dont la mesure de courbure est constante, peut aussi s'exprimer en disant que les figures peuvent s'y mouvoir sans subir d'extension. Car il est évident que les figures ne pourraient y être susceptibles de translations et de rotations arbitraires, si la mesure de courbure n'était la même en chaque point et dans toutes les directions ».

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

Passage du *Hv* qui intéresse HELMHOLTZ : « Les variétés dont la mesure de courbure est partout $= 0$ peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés, dont la mesure de courbure est partout constante. Le caractère commun de ces variétés, dont la mesure de courbure est constante, peut aussi s'exprimer en disant que les figures peuvent s'y mouvoir sans subir d'extension. Car il est évident que les figures ne pourraient y être susceptibles de translations et de rotations arbitraires, si la mesure de courbure n'était la même en chaque point et dans toutes les directions ».

Ce qui constitue une *évidence* aux yeux de RIEMANN doit être explicité pour HELMHOLTZ.

- RIEMANN raisonne *a priori* sur des variétés (riemanniennes) pour ensuite se restreindre aux variétés homogènes,
- HELMHOLTZ formule des « axiomes » qu'il restreint à la géométrie euclidienne avant de réaliser qu'ils sont communs aux géométries euclidienne et non euclidiennes.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par Helmholtz

Plusieurs sources montrent que le *Hv* de Riemann est généralement lu dans les années 1870 à 1890 à travers le « prisme » de Helmholtz. Ces « lectures » sont centrées sur les quatre axiomes de Helmholtz

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

Plusieurs sources montrent que le *Hv* de RIEMANN est généralement lu dans les années 1870 à 1890 à travers le « prisme » de HELMHOLTZ. Ces « lectures » sont centrées sur les quatre axiomes de HELMHOLTZ

- qu'il s'agit de clarifier et / ou de corriger,
- dont il est nécessaire de préciser le statut sur un plan épistémologique.

La « réécriture » du *Habilitationsvortrag* par HELMHOLTZ

Plusieurs sources montrent que le *Hv* de RIEMANN est généralement lu dans les années 1870 à 1890 à travers le « prisme » de HELMHOLTZ. Ces « lectures » sont centrées sur les quatre axiomes de HELMHOLTZ

- qu'il s'agit de clarifier et / ou de corriger,
- dont il est nécessaire de préciser le statut sur un plan épistémologique.

- B. ERDMANN : *Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie* (1877),
- S. LIE : « Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen » (1886),
- S. LIE, F. ENGEL : *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd III, (1893).
- B. RUSSELL : *An essay on the foundations of geometry*.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

B. ERDMANN (Privatdozent à Berlin jusqu'en 1878, éditeur des œuvres de KANT). Reprise en 1877 des thèses de HELMHOLTZ, i.e. forme d'empirisme radical sur les axiomes de la géométrie.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

B. Erdmann (Privatdozent à Berlin jusqu'en 1878, éditeur des œuvres de Kant). Reprise en 1877 des thèses de Helmholtz, i.e. forme d'empirisme radical sur les axiomes de la géométrie.

Distinction entre

(i) les axiomes comme propositions immédiatement évidentes et indémontrables rapportées
   - à des rapports généraux de grandeurs,
   - à des déterminations essentielles de notre intuition de l'espace,

Erdmann et les axiomes de la géométrie

B. Erdmann (Privatdozent à Berlin jusqu'en 1878, éditeur des œuvres de Kant). Reprise en 1877 des thèses de Helmholtz, i.e. forme d'empirisme radical sur les axiomes de la géométrie.

Distinction entre

(i) les axiomes comme propositions immédiatement évidentes et indémontrables rapportées
   - à des rapports généraux de grandeurs,
   - à des déterminations essentielles de notre intuition de l'espace,

(ii) les définitions qui développent les concepts fondamentaux nécessaires aux constructions dans l'espace.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

B. ERDMANN (Privatdozent à Berlin jusqu'en 1878, éditeur des œuvres de KANT). Reprise en 1877 des thèses de HELMHOLTZ, i.e. forme d'empirisme radical sur les axiomes de la géométrie.

Distinction entre

(i) les axiomes comme propositions immédiatement évidentes et indémontrables rapportées
   - à des rapports généraux de grandeurs,
   - à des déterminations essentielles de notre intuition de l'espace,

(ii) les définitions qui développent les concepts fondamentaux nécessaires aux constructions dans l'espace.

Pour ERDMANN les axiomes sont des propositions *empiriques*. En particulier, il s'accorde avec HELMHOLTZ pour faire dépendre la géométrie de la mécanique.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Plan de l'ouvrage de Erdmann

- Histoire des systèmes d'axiomes en géométrie (Legendre, Gauss, Lobatchevsky, Bolyai, Riemann, Helmholtz),
- Les axiomes de la géométrie euclidienne (inspiration helmholtzienne),
- conséquences philosophiques (développement d'une conception empiriste de la géométrie),
- fondements d'une théorie de la géométrie.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Plan de l'ouvrage de ERDMANN

- Histoire des systèmes d'axiomes en géométrie (LEGENDRE, GAUSS, LOBATCHEVSKY, BOLYAI, RIEMANN, HELMHOLTZ),
- Les axiomes de la géométrie euclidienne (inspiration helmholtzienne),
- conséquences philosophiques (développement d'une conception empiriste de la géométrie),
- fondements d'une théorie de la géométrie.

ERDMANN commente le *Hv* en s'appuyant exclusivement sur le point de vue de HELMHOLTZ. Il rejette assez sévèrement les arguments de l'astronome ZÖLLNER qui, dans *Über die Natur der Cometen* (1872), suppose que l'espace physique pourrait être fini.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Axiomatisation de la géométrie euclidienne par ERDMANN :

(i) L'espace est une variété triplement étendue,

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Axiomatisation de la géométrie euclidienne par Erdmann :

(i) L'espace est une variété triplement étendue,

(ii) l'espace est une variété congruente en elle-même :

- il existe des corps rigides,
- les corps rigides se meuvent de manière complètement libre,
- les corps rigides conservent leur « dimension » après un tour complet autour d'un axe de rotation,

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Axiomatisation de la géométrie euclidienne par ERDMANN :

(i) L'espace est une variété triplement étendue,

(ii) l'espace est une variété congruente en elle-même :
- il existe des corps rigides,
- les corps rigides se meuvent de manière complètement libre,
- les corps rigides conservent leur « dimension » après un tour complet autour d'un axe de rotation,

(iii) l'espace est une variété plane ou infinie
- une et une seule ligne droite est possible entre deux points de l'espace,
- la somme des angles d'un triangle s'élève à deux droits.

Erdmann et les axiomes de la géométrie

Axiomatisation de la géométrie euclidienne par Erdmann :

(i) L'espace est une variété triplement étendue,

(ii) l'espace est une variété congruente en elle-même :

- il existe des corps rigides,
- les corps rigides se meuvent de manière complètement libre,
- les corps rigides conservent leur « dimension » après un tour complet autour d'un axe de rotation,

(iii) l'espace est une variété plane ou infinie

- une et une seule ligne droite est possible entre deux points de l'espace,
- la somme des angles d'un triangle s'élève à deux droits.

Critique sévère de Russell contre Helmholtz et Erdmann : ces derniers n'ont pas su distinguer entre axiomes *a priori* et axiomes *empiriques*. En outre, ils n'ont pas de bons critères d'*aprioricité*.

Lie et Hilbert

Réexamen des axiomes de HELMHOLTZ par LIE entre 1886 et 1893.

- LIE traduit entièrement le problème de RIEMANN-HELMHOLTZ en termes de théorie des groupes,
- il montre que l'axiome IV ne va aucunement de soi dans le passage à l'infiniment petit (cf. analyses de MERKER).

Lie et Hilbert

Réexamen des axiomes de Helmholtz par Lie entre 1886 et 1893.

- Lie traduit entièrement le problème de Riemann-Helmholtz en termes de théorie des groupes,
- il montre que l'axiome IV ne va aucunement de soi dans le passage à l'infiniment petit (cf. analyses de Merker).

Dans ses annexes aux *Grundlagen der Geometrie* consacrées à ce problème, Hilbert fait converger un triple héritage :

(i) l'héritage ensembliste de Cantor dont il se réclame,
(ii) l'héritage riemannien sur les variétés,
(iii) l'héritage de Lie sur les groupes continus de transformations.

Lie et Hilbert

Réexamen des axiomes de HELMHOLTZ par LIE entre 1886 et 1893.

- LIE traduit entièrement le problème de RIEMANN-HELMHOLTZ en termes de théorie des groupes,
- il montre que l'axiome IV ne va aucunement de soi dans le passage à l'infiniment petit (cf. analyses de MERKER).

Dans ses annexes aux *Grundlagen der Geometrie* consacrées à ce problème, HILBERT fait converger un triple héritage :

(i) l'héritage ensembliste de CANTOR dont il se réclame,

(ii) l'héritage riemannien sur les variétés,

(iii) l'héritage de LIE sur les groupes continus de transformations.

Le but de HILBERT n'est pas seulement de clarifier les axiomes de HELMHOLTZ mais aussi de préciser le sens du concept de variété.

Vers une axiomatisation du concept de variété

HILBERT s'intéresse essentiellement aux variétés topologiques bidimensionnelles réelles. Dans sa définition, il se fonde sur le concept de *voisinage*.

Vers une axiomatisation du concept de variété

HILBERT s'intéresse essentiellement aux variétés topologiques bidimensionnelles réelles. Dans sa définition, il se fonde sur le concept de *voisinage*.

Il ne dispose pas encore d'une définition des *espaces topologiques abstraits* et il ne dégage pas toutes les conditions qui président à la définition d'une variété. (Importance des travaux ultérieurs de HAUSDORFF dans les *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).)

Vers une axiomatisation du concept de variété

HILBERT s'intéresse essentiellement aux variétés topologiques bidimensionnelles réelles. Dans sa définition, il se fonde sur le concept de *voisinage*.

Il ne dispose pas encore d'une définition des *espaces topologiques abstraits* et il ne dégage pas toutes les conditions qui président à la définition d'une variété. (Importance des travaux ultérieurs de HAUSDORFF dans les *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).)

(i) HILBERT commence à clarifier la notion d'espace au sens de l'*analysis situs* en formulant une liste (encore perfectible) d'axiomes sur les voisinages,

Vers une axiomatisation du concept de variété

Hilbert s'intéresse essentiellement aux variétés topologiques bidimensionnelles réelles. Dans sa définition, il se fonde sur le concept de *voisinage*.

Il ne dispose pas encore d'une définition des *espaces topologiques abstraits* et il ne dégage pas toutes les conditions qui président à la définition d'une variété. (Importance des travaux ultérieurs de Hausdorff dans les *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).)

(i) Hilbert commence à clarifier la notion d'espace au sens de l'*analysis situs* en formulant une liste (encore perfectible) d'axiomes sur les voisinages,

(ii) il ne dit pas qu'une variété topologique est un espace séparé (pas plus que Weyl en 1913, il faut attendre Hausdorff),

Vers une axiomatisation du concept de variété

HILBERT s'intéresse essentiellement aux variétés topologiques bidimensionnelles réelles. Dans sa définition, il se fonde sur le concept de *voisinage*.

Il ne dispose pas encore d'une définition des *espaces topologiques abstraits* et il ne dégage pas toutes les conditions qui président à la définition d'une variété. (Importance des travaux ultérieurs de HAUSDORFF dans les *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).)

(i) HILBERT commence à clarifier la notion d'espace au sens de l'*analysis situs* en formulant une liste (encore perfectible) d'axiomes sur les voisinages,

(ii) il ne dit pas qu'une variété topologique est un espace séparé (pas plus que WEYL en 1913, il faut attendre HAUSDORFF),

(iii) il s'en tient à des variétés topologiques (i.e. localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$).

Vers une axiomatisation du concept de variété

Avant de définir une variété topologique bidimensionnelle, HILBERT analyse le concept de « plan numérique » [Zahlenebene], (i.e. $\mathbb{R}^2$).

Vers une axiomatisation du concept de variété

Avant de définir une variété topologique bidimensionnelle, HILBERT analyse le concept de « plan numérique » [Zahlenebene], (i.e. $\mathbb{R}^2$).

- Il se donne une courbe de Jordan fermée J sur $\mathbb{R}^2$ (image par homéomorphisme du cercle unité de $\mathbb{R}^2$)
- il appelle domaine de Jordan [jordansches Gebiet] l'intérieur d'une telle courbe.

Vers une axiomatisation du concept de variété

Avant de définir une variété topologique bidimensionnelle, HILBERT analyse le concept de « plan numérique » [Zahlenebene], (i.e. $\mathbb{R}^2$).

- Il se donne une courbe de Jordan fermée J sur $\mathbb{R}^2$ (image par homéomorphisme du cercle unité de $\mathbb{R}^2$)
- il appelle domaine de Jordan [jordansches Gebiet] l'intérieur d'une telle courbe.

Réf. au *théorème de Jordan* selon lequel le complémentaire d'une courbe de Jordan a deux composantes connexes de frontière commune J. Conséquence : si un chemin joint un point intérieur à J à un point extérieur à J, alors son image possède au moins un point commun avec J. (cf. C. JORDAN, *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, T. 3, 1887, p. 593)

Vers une axiomatisation du concept de variété

Jordan, p. 593 : « Il est donc établi que toute courbe continue C [i.e. fermée simple] divise le plan en 2 régions, l'une extérieure l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini ».

Vers une axiomatisation du concept de variété

JORDAN, p. 593 : « Il est donc établi que toute courbe continue C [i.e. fermée simple] divise le plan en 2 régions, l'une extérieure l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini ».

« Toute ligne continue D, qui joint un point intérieur q à un point extérieur q', coupera nécessairement la courbe C ».

Vers une axiomatisation du concept de variété

JORDAN, p. 593 : « Il est donc établi que toute courbe continue C [i.e. fermée simple] divise le plan en 2 régions, l'une extérieure l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini ».

« Toute ligne continue D, qui joint un point intérieur q à un point extérieur q', coupera nécessairement la courbe C ».

- exemple canonique de théorème impliquant une profonde distance entre évidence intuitive et démonstration rigoureuse,
- correspond au mot d'ordre de HILBERT selon lequel nous devons *analyser nos intuitions* pour fonder rigoureusement la géométrie.

Vers une axiomatisation du concept de variété

HILBERT : « Le plan est un système de points. Chaque point A détermine certains systèmes partiels de points, auxquels lui-même appartient et qui s'appellent les voisinages de ce point ».

Vers une axiomatisation du concept de variété

Hilbert : « Le plan est un système de points. Chaque point A détermine certains systèmes partiels de points, auxquels lui-même appartient et qui s'appellent les voisinages de ce point ».

Il précise les quatre propriétés auxquelles ces voisinages doivent satisfaire.

(1) Tout point A du plan est contenu dans chacun de ses voisinages ;
(2) si B est un point quelconque appartenant à un voisinage V de A, alors V est également un voisinage de B ;
(3) pour deux voisinages quelconques V et W de A, il existe toujours un voisinage de A qui est commun à V et W ;
(4) si A et B sont deux points quelconques du plan, alors il y a toujours un voisinage qui contient en même temps les points A et B.

Vers une axiomatisation du concept de variété

- Les axiomes (1) et (3) de Hilbert correspondent exactement aux axiomes 1. et 3. de Hausdorff.
- L'axiome (2) de Hilbert est remplacé par l'axiome 4. = tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de tout point de V.

Vers une axiomatisation du concept de variété

- Les axiomes (1) et (3) de Hilbert correspondent exactement aux axiomes 1. et 3. de Hausdorff.
- L'axiome (2) de Hilbert est remplacé par l'axiome 4. = tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de tout point de V.
- L'axiome 2. de Hausdorff affirme que tout sur-ensemble V d'un voisinage U de x est un voisinage de x.

Vers une axiomatisation du concept de variété

- Les axiomes (1) et (3) de Hilbert correspondent exactement aux axiomes 1. et 3. de Hausdorff.
- L'axiome (2) de Hilbert est remplacé par l'axiome 4. = tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de tout point de V.
- L'axiome 2. de Hausdorff affirme que tout sur-ensemble V d'un voisinage U de x est un voisinage de x. L'axiome (4) de Hilbert est problématique, il doit être mis de côté pour pouvoir énoncé l'axiome de séparation selon lequel pour deux points quelconques A et B, il existe au moins un voisinage V de A et un voisinage W de B d'intersection vide.

Vers une axiomatisation du concept de variété

- Les axiomes (1) et (3) de Hilbert correspondent exactement aux axiomes 1. et 3. de Hausdorff.
- L'axiome (2) de Hilbert est remplacé par l'axiome 4. = tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de tout point de V.
- L'axiome 2. de Hausdorff affirme que tout sur-ensemble V d'un voisinage U de x est un voisinage de x. L'axiome (4) de Hilbert est problématique, il doit être mis de côté pour pouvoir énoncé l'axiome de séparation selon lequel pour deux points quelconques A et B, il existe au moins un voisinage V de A et un voisinage W de B d'intersection vide.

L'analyse de la notion de voisinage permet à Hilbert d'accomplir une montée en généralité : non plus se restreindre au plan numérique, mais définir une variété topologique.

Vers une axiomatisation du concept de variété

Reprise et simplification de la définition de HILBERT par WEYL dans le § 4 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Au cours du § 7 de cet ouvrage, WEYL définit le concept de variété *analytique* et il montre qu'une surface de RIEMANN est une *variété complexe de dimension 1*.

Vers une axiomatisation du concept de variété

Reprise et simplification de la définition de HILBERT par WEYL dans le § 4 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Au cours du § 7 de cet ouvrage, WEYL définit le concept de variété *analytique* et il montre qu'une surface de RIEMANN est une *variété complexe de dimension 1*.

Fort de ces définitions par axiomes, WEYL projette l'existence d'un lien étroit entre

- *La Dissertation* de RIEMANN (1851),
- son *Habilitationsvortrag* (1854).

Vers une axiomatisation du concept de variété

Reprise et simplification de la définition de Hilbert par Weyl dans le § 4 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Au cours du § 7 de cet ouvrage, Weyl définit le concept de variété *analytique* et il montre qu'une surface de Riemann est une *variété complexe de dimension 1*.

Fort de ces définitions par axiomes, Weyl projette l'existence d'un lien étroit entre

- *La Dissertation* de Riemann (1851),
- son *Habilitationsvortrag* (1854).

En réalité, si lien il y a entre ces deux écrits, il ne se situe pas sur un plan « conceptuel ». Dans les deux cas, Riemann développe un projet de *géométrisation de l'analyse* (cf. Scholz).